ЎзМУ ХАБАРЛАРИ

ВЕСТНИК НУУз

ACTA NUUz

МИРЗО УЛУҒБЕК НОМИДАГИ ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИНИНГ ИЛМИЙ ЖУРНАЛИ

ЖУРНАЛ 1997 ЙИЛДАН ЧИҚА БОШЛАГАН

2023
1/1
Аниқ фанлар

ТОШКЕНТ — 2023

MUNDARIJA
CONTENTS
СОДЕРЖАНИЕ

УДК 517.55

СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР ОДНОГО ЧАСТИЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Кучаров Р. Р. *
Тухтамуродова Т. М. *
Арзикулов Г. П. *

РЕЗЮМЕ

Изучается местоположение существенного спектра одного трехчастичного оператора Шредингера. Вычислена нижняя грань существенного спектра одного частично интегрального оператора H типа Фредгольма.

Ключевые слова: существенный спектр, дискретный спектр, нижняя грань существенного спектра, частично интегральный оператор типа Фредгольма.

1. ВВЕДЕНИЕ

Линейные уравнения и операторы с частными интегралами возникают в теории эластики [1], механики сплошных сред [2,3,4], аэродинамики [5] и в теории частных дифференциальных уравнений [6,7] и ряда других задач [8,9,10]. Самосопряженные частично интегральные операторы возникают в теории дискретных операторов Шредингера (см. [11,12,14]).В работе [15] исследуется разрешимость частично интегрального уравнения типа Фредгольма второго рода с вырожденным ядром в пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$. В настоящей работе рассматривается самосопряженный частично интегральный оператор H типа Фредгольма, который возникает в теории дискретных операторов Шредингера (см. [12,13]).

Пусть $\Omega_1 = [a,b]^{\nu_1}$ и $\Omega_2 = [c,d]^{\nu_2}$ $(\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N})$. В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ рассмотрим следующий самосопряженный частично интегральный оператор (ЧИО)

$$H = H_0 - (T_1 + T_2). \tag{1}$$

Здесь действия операторов H_0, T_1 и T_2 определяются по формулам

$$H_0 f(x,y) = k_0(x,y) f(x,y), \;\; f \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2),$$

$$T_1 f(x,y) = \int_{\Omega_1} \left(\gamma_0 \varphi_1(x)\overline{\varphi_1(s)} + \gamma \varphi_2(x)\overline{\varphi_2(s)}\right) f(s,y) d\mu_1(s), \;\; \gamma > 0, \gamma_0 \geq 0$$

$$T_2 f(x,y) = \int_{\Omega_2} \left(\mu_0 \psi_1(y)\overline{\psi_1(t)} + \mu \psi_2(y)\overline{\psi_2(t)}\right) f(x,t) d\mu_2(t), \;\; \mu > 0, \mu_0 \geq 0$$

* **Кучаров Р. Р.** – Национальный университет Узбекистана, Ташкентский международный университет управления финансами и технологии ramz3364647@yahoo.com, r.kucharov@tift.uz
* **Тухтамуродова Т. М.** – Национальный университет Узбекистана, mirzayevatilloxon13@gmail.com
* **Арзикулов Г. П.** – Ташкентский государственный технический университет, arzikulov79@mail.ru

где $k_0(x,y)$ – неотрицательная непрерывная функция на $\Omega_1\times\Omega_2$, $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$, $\psi_1(\cdot)$ и $\psi_2(\cdot)$ – взаимно ортонормированные непрерывные функции на Ω_1, Ω_2. т.е.

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\int_{\Omega_1}\varphi_i(\xi)\overline{\varphi_j(\xi)}d\mu_1(\xi)=\begin{cases}0, i\neq j\\ 1, i=j\end{cases},$$

$$(\psi_i,\psi_j)=\int_{\Omega_2}\psi_i(\xi)\overline{\psi_j(\xi)}d\mu_2(\xi)=\begin{cases}0, i\neq j\\ 1, i=j\end{cases}$$

и $\mu_j(\cdot)$ – мера Лебега на Ω_j, $j=1,2$. Таким образом оператор H (1) зависит от четырех параметров γ, γ_0, μ_0 и μ, т.е. $H=H(\gamma_0,\gamma,\mu_0,\mu)$.

Через $\rho(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{ess}(\cdot)$ и $\sigma_{disc}(\cdot)$ обозначим соответственно резольвентное множество, спектр, существенный спектр и дискретный спектр самосопряженных операторов [16].

Дискретные операторы Шредингера вида (1), ассоциированные с системой трех частиц на трехмерной решетке $\mathbb{Z}^3$, которые представляются частично интегральным оператором H, изучены в работах [12], [13], [14]. В работе [12] получены достаточные условия конечности и бесконечности дискретного спектра для оператора H при $\gamma_0=\mu_0=0$ и $\sigma_{ess}(H)=\sigma(H_0)$. В [13] доказано существование эффекта Ефимова (существование бесконечного числа собственных значений) в модели (1) для конкретной заданной функции $k_0(x,y)$, причем нижняя грань существенного спектра гамильтониана H равняется нулю, т.е. $\sigma_{ess}(H)=\sigma(H_0)$ и $\gamma_0=\mu_0=0$. В работе [14] изучены существенный спектр и количество собственных значений, лежащих ниже нижней грани существенного спектра в модели (1) при $\gamma_0=\mu_0=0$, когда функция $k_0(x,y)$ имеет вид: $k_0(x,y)=u(x)u(y)$, где $u(x)$ – неотрицательная непрерывная функция на $\Omega=\Omega_1=\Omega_2$ и $\int_\Omega\frac{dx}{u(x)}<\infty$. Дано точное описание существенного спектра частично интегрального оператора H при $\gamma_0=\mu_0=0$ и доказана конечность количества собственных значений, лежащих ниже нижнего края существенного спектра в модели (1). В [16] изучали существенный и дискретный спектры ЧИО (1) в случали $k_0(x,y)=u(x)v(y)$, $\gamma_0,\mu_0\geq 0$, $\gamma,\mu>0$ и $\varphi_1(x)=\psi_1(x)=1$. Вычисленал нижняя грань существенного спектра ЧИО H.

Пусть $u(x)$, $v(y)$ – неотрицательные непрерывные функции на Ω_1 и Ω_2, соответственно, и $0\in Ran(u)\cap Ran(v)$. В настоящей работе мы изучаем существенный спектр и собственных значений существенного спектра в модели (1), когда функция $k_0(x,y)$ имеет вид $k_0(x,y)=u(x)v(y)$. Дано описание существенного спектра гамильтониана (1) и вычислена нижняя грань существенного спектра для произвольных $\gamma=\gamma_0>0$ и $\mu=\mu_0>0$. Получена оценка для количества отрицательных собственных значений ЧИО H.

2. ДЕТЕРМИНАНТ И СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ НЕКОТОРОГО ЧАСТИЧНОГО ИНТЕГРАЛЬ-НОГО ОПЕРАТОРА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Пусть $\Omega_1\subset\mathbb{R}^{d_1}$, $d_1\in\mathbb{N}$ и $\Omega_2\subset\mathbb{R}^{d_2}$, $d_2\in\mathbb{N}$ – компактные множества. Рассмотрим непрерывные функции $k_1(x,s,y)$ на $\Omega_1^2\times\Omega_2$, $k_1(x,s,y)=\overline{k_1(s,x,y)}$ и $k_2(x,t,y)$ на $\Omega_1\times\Omega_2^2$, $k_2(x,t,y)=\overline{k_2(x,y,t)}$. В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_1\times\Omega_2)$ определим самосопряженные частично интегральные операторы A_1 и A_2:

$$(A_1f)(x,y)=\int_{\Omega_1}k_1(x,s,y)f(s,y)ds,$$

$$(A_2f)(x,y) = \int_{\Omega_2} k_2(x,t,y)f(x,t)dt.$$

Здесь и в дальнейшем будем предполагать, что $ds = d\mu_1(s)$, $dt = d\mu_2(t)$ и $\mu_1(\Omega_1) = \mu_2(\Omega_2) = 1$.

Пусть $k_0(x,y)$ – произвольная вещественнозначная непрерывная функция на $\Omega_1 \times \Omega_2$. Обозначим через V_0 оператор умножения на функцию $k_0(x,y)$, т.е.

$$(V_0f)(x,y) = k_0(x,y)f(x,y).$$

Рассмотрим линейный ограниченный самосопряженный ЧИО

$$V = V_0 - A, \tag{2}$$

действующий в пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$, где $A = A_1 + A_2$.

Существенный спектр ЧИО V (2) изучен в [11]. В работе [17] получено достаточное условие для конечности количества собственных значений, лежащих ниже нижней грани существенного спектра в модели (2), когда $k_0(x,y) \geq 0$ и ядра $k_1(x,s,y)$, $k_2(x,t,y)$ являются неотрицательными функциями двух переменных (т.е. $k_1(x,s,y) = h_1(x,s)$, $k_2(x,t,y) = h_2(y,t)$).

Для каждого $\lambda \in \rho(H_0)$ в пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ определим частично интегральные операторы

$$B_1(\lambda)f(x,y) = \int_{\Omega_1} \frac{k_1(x,s,y)}{k_0(s,y)-\lambda} f(s,y)ds,$$

$$B_2(\lambda)f(x,y) = \int_{\Omega_2} \frac{k_2(x,t,y)}{k_0(x,t)-\lambda} f(x,t)dt.$$

Определим множества

$$\sigma_1 = \{\lambda \in \rho(H_0) : \Delta_1(y_0;\lambda) = 0 \text{ для некоторого } y_0 \in \Omega_2\}, \tag{3}$$

$$\sigma_2 = \{\lambda \in \rho(H_0) : \Delta_2(x_0;\lambda) = 0 \text{ для некоторого } x_0 \in \Omega_1\}, \tag{4}$$

где $\Delta_1(y;\lambda)$ и $\Delta_2(x;\lambda)$ – детерминанты частично интегральных операторов $E - B_1(\lambda)$ и $E - B_2(\lambda)$, соответственно (см. [18]).

Положим $\sigma_0 = \sigma(H_0)$. Имеем $\sigma_0 = Ran(k_0)$. В работе [19] получены следующие равенства

$$\sigma(V_0 - A_1) = \sigma_0 \cup \sigma_1, \tag{5}$$

$$\sigma(V_0 - A_2) = \sigma_0 \cup \sigma_2.$$

Описание существенного спектра оператора V приведено в [11] и там доказано, что

$$\sigma_{ess}(V) = \sigma(V_0 - A_1) \cup \sigma(V_0 - A_2). \tag{6}$$

Число

$$E_{\min}(V) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_{ess}(V)\}$$

будем называть *нижней гранью* (или *нижним краем*) существенного спектра оператора V.

В данной работе изучается существенный и дискретный спектр следующего модельного оператора
$$H = H_0 - (\gamma T_1 + \mu T_2), \ \ \gamma > 0, \ \ \mu > 0 \tag{7}$$
в пространстве $L_2(\Omega \times \Omega)$, где
$$H_0 f(x,y) = u(x)v(y)f(x,y).$$

Из следующих равенств
$$k_0(x,y) = u(x)v(y),$$
$$k_1(x,s,y) = \gamma(\varphi_1(x)\overline{\varphi_1(s)} + \varphi_2(x)\overline{\varphi_2(s)}),$$
$$k_2(x,t,y) = \mu(\psi_1(y)\overline{\psi_1(t)} + \psi_2(y)\overline{\psi_2(t)})$$
для операторов $B_1(\lambda) = B_1(\lambda;\gamma)$ и $B_2(\lambda) = B_2(\lambda;\mu)$ получим, что
$$B_1(\lambda)f(x,y) = \gamma \int\limits_{\Omega} \frac{\varphi_1(x)\overline{\varphi_1(s)} + \varphi_2(x)\overline{\varphi_2(s)}}{u(s)v(y) - \lambda} f(s,y)ds, \ \ \lambda \in \rho(H_0),$$
$$B_2(\lambda)f(x,y) = \mu \int\limits_{\Omega} \frac{\psi_1(y)\overline{\psi_1(t)} + \psi_2(y)\overline{\psi_2(t)}}{u(x)u(t) - \lambda} f(x,t)dt, \ \ \lambda \in \rho(H_0).$$

Лемма 1. *Для детерминантов $\Delta_1(y;\lambda) = \Delta_1(y;\lambda,\gamma)$ и $\Delta_2(x;\lambda) = \Delta_2(x;\lambda,\mu)$ частично интегральных операторов $E - B_1(\lambda)$ и $E - B_2(\lambda)$ имеет место равенство*

$$\textit{1)} \ \ \Delta_1(y;\lambda,\gamma) = \left(1 - \gamma \int_{\Omega_1} \frac{|\varphi_1(s)|^2 ds}{u(s)v(y) - \lambda}\right)\left(1 - \gamma \int_{\Omega_1} \frac{|\varphi_2(s)|^2 ds}{u(s)v(y) - \lambda}\right) -$$
$$-\gamma^2 \int_{\Omega_1} \frac{\overline{\varphi_1(s)}\varphi_2(s)ds}{u(s)v(y) - \lambda} \cdot \int_{\Omega_1} \frac{\varphi_1(s)\overline{\varphi_2(s)}ds}{u(s)v(y) - \lambda}, \ \ \lambda \in \rho(H_0);$$
$$\textit{2)} \ \ \Delta_2(x;\lambda,\mu) = \left(1 - \mu \int_{\Omega_2} \frac{|\psi_1(t)|^2 dt}{u(x)v(t) - \lambda}\right)\left(1 - \mu \int_{\Omega_2} \frac{|\psi_2(t)|^2 dt}{u(x)v(t) - \lambda}\right) -$$
$$-\mu^2 \int_{\Omega_2} \frac{\overline{\psi_1(t)}\psi_2(t)dt}{u(x)v(t) - \lambda} \cdot \int_{\Omega_2} \frac{\psi_1(t)\overline{\psi_2(t)}dt}{u(x)v(t) - \lambda}, \ \ \lambda \in \rho(H_0).$$

Доказательство. Из определения детерминантов Фредгольма [20] для детерминанта $\Delta_1(y;\lambda) = \Delta_1(y;\lambda,\gamma_0,\gamma)$ частично интегрального оператора $E - B_1(\lambda)$ имеем (см. [18])
$$\Delta_1(y;\lambda) = \Delta_1(y;\lambda,\gamma) = 1 + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!} d_n(y;\lambda),$$
где
$$d_n(y;\lambda) = \int_{\Omega_1} \ldots \int_{\Omega_1} \Phi_1^{(n)} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_n; & y \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n; & \lambda \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \ldots ds_n,$$

и

$$\Phi_1^{(n)}\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n; & y \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n; & \lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{k_1(s_1,s_1,y)}{k_0(s_1,y)-\lambda} & \dfrac{k_1(s_1,s_2,y)}{k_0(s_2,y)-\lambda} & \dots & \dfrac{k_1(s_1,s_n,y)}{k_0(s_n,y)-\lambda} \\ \dfrac{k_1(s_2,s_1,y)}{k_0(s_1,y)-\lambda} & \dfrac{k_1(s_2,s_2,y)}{k_0(s_2,y)-\lambda} & \dots & \dfrac{k_1(s_2,s_n,y)}{k_0(s_n,y)-\lambda} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{k_1(s_n,s_1,y)}{k_0(s_1,y)-\lambda} & \dfrac{k_1(s_n,s_2,y)}{k_0(s_2,y)-\lambda} & \dots & \dfrac{k_1(s_n,s_n,y)}{k_0(s_n,y)-\lambda} \end{vmatrix}.$$

Докажем, что $d_n(y;\lambda)=0$ при любом $n\geq 3$. Имеем

$$\Phi_1^{(n)}\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n; & y \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n; & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_1(s_1)\overline{\varphi_1(s_1)}+\varphi_2(s_1)\overline{\varphi_2(s_1)} & \varphi_1(s_1)\overline{\varphi_1(s_2)}+\varphi_2(s_1)\overline{\varphi_2(s_2)} & \dots & \varphi_1(s_1)\overline{\varphi_1(s_n)}+\varphi_2(s_1)\overline{\varphi_2(s_n)} \\ \varphi_1(s_2)\overline{\varphi_1(s_1)}+\varphi_2(s_2)\overline{\varphi_2(s_1)} & \varphi_1(s_2)\overline{\varphi_1(s_2)}+\varphi_2(s_2)\overline{\varphi_2(s_2)} & \dots & \varphi_1(s_2)\overline{\varphi_1(s_n)}+\varphi_2(s_2)\overline{\varphi_2(s_n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(s_n)\overline{\varphi_1(s_1)}+\varphi_2(s_n)\overline{\varphi_2(s_1)} & \varphi_1(s_n)\overline{\varphi_1(s_2)}+\varphi_2(s_n)\overline{\varphi_2(s_2)} & \dots & \varphi_1(s_n)\overline{\varphi_1(s_n)}+\varphi_2(s_n)\overline{\varphi_2(s_n)} \end{vmatrix}\cdot$$

$$\cdot\frac{\lambda^n}{\prod\limits_{i=1}^{n}\left(u(s_i)v(y)-\lambda\right)}.$$

Пусть $n\geq 3$. Положим

$$\Delta(s_1,s_2,...,s_n)=$$

$$\begin{vmatrix} |\varphi_1(s_1)|^2+|\varphi_2(s_1)|^2 & \varphi_1(s_1)\overline{\varphi_1(s_2)}+\varphi_2(s_1)\overline{\varphi_2(s_2)} & \dots & \varphi_1(s_1)\overline{\varphi_1(s_n)}+\varphi_2(s_1)\overline{\varphi_2(s_n)} \\ \varphi_1(s_2)\overline{\varphi_1(s_1)}+\varphi_2(s_2)\overline{\varphi_2(s_1)} & \varphi_1(s_2)\overline{\varphi_1(s_2)}+|\varphi_2(s_2)|^2 & \dots & \varphi_1(s_2)\overline{\varphi_1(s_n)}+\varphi_2(s_2)\overline{\varphi_2(s_n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(s_n)\overline{\varphi_1(s_1)}+\varphi_2(s_n)\overline{\varphi_2(s_1)} & \varphi_1(s_n)\overline{\varphi_1(s_2)}+\varphi_2(s_n)\overline{\varphi_2(s_2)} & \dots & \varphi_1(s_n)\overline{\varphi_1(s_n)}+|\varphi_2(s_n)|^2 \end{vmatrix}$$

Используя свойство детерминанта, мы записать последний детерминант следующим образом:

$$\Delta(s_1, s_2, ..., s_n) =$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi_1(s_1) & \varphi_2(s_1) & 0 & \dots & 0 \\ \varphi_1(s_2) & \varphi_2(s_2) & 0 & \dots & 0 \\ \varphi_1(s_3) & \varphi_2(s_3) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \varphi_1(s_n) & \varphi_2(s_2) & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \overline{\varphi_1(s_1)} & \overline{\varphi_1(s_2)} & \overline{\varphi_1(s_3)} & \dots & \overline{\varphi_1(s_n)} \\ \overline{\varphi_2(s_1)} & \overline{\varphi_2(s_2)} & \overline{\varphi_2(s_3)} & \dots & \overline{\varphi_2(s_n)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

т.е. $\Delta(s_1, s_2, ..., s_n; \lambda) = 0$ при $n \geq 3$. Отсюда $d_n(y;\lambda) = 0$ при любом $n \geq 3$.

С другой стороны имеем:

$$d_1(y;\lambda) = \int_{\Omega_1} \frac{|\varphi_1(s_1)|^2 + |\varphi_2(s_1)|^2}{u(s)v(y) - \lambda} ds,$$

$$d_2(y;\lambda) = 2\gamma^2 \left(\int_{\Omega_1} \frac{|\varphi_1(s)|^2 ds}{u(s)v(y) - \lambda} \cdot \int_{\Omega_1} \frac{|\varphi_2(s)|^2 ds}{u(s)v(y) - \lambda} - \int_{\Omega_1} \frac{\overline{\varphi_1(s)}\varphi_2(s) ds}{u(s)v(y) - \lambda} \cdot \int_{\Omega_1} \frac{\varphi_1(s)\overline{\varphi_2(s)} ds}{u(s)v(y) - \lambda} \right)$$

Тогда из равенства

$$\Delta_1(y;\lambda,\gamma) = 1 - \frac{d_1(y;\lambda)}{1!} + \frac{d_2(y;\lambda)}{2!}$$

вытекает, что

$$\Delta_1(y;\lambda,\gamma) = \left(1 - \gamma \int_{\Omega_1} \frac{|\varphi_1(s)|^2 ds}{u(s)v(y) - \lambda}\right) \left(1 - \gamma \int_{\Omega_1} \frac{|\varphi_2(s)|^2 ds}{u(s)v(y) - \lambda}\right) -$$
$$-\gamma^2 \int_{\Omega_1} \frac{\overline{\varphi_1(s)}\varphi_2(s) ds}{u(s)v(y) - \lambda} \cdot \int_{\Omega_1} \frac{\varphi_1(s)\overline{\varphi_2(s)} ds}{u(s)v(y) - \lambda}, \ \ \lambda \in \rho(H_0).$$

Аналогично получим, что

$$\Delta_2(x;\lambda,\mu) = \left(1 - \mu \int_{\Omega_2} \frac{|\psi_1(t)|^2 dt}{u(x)v(t) - \lambda}\right) \left(1 - \mu \int_{\Omega_2} \frac{|\psi_2(t)|^2 dt}{u(x)v(t) - \lambda}\right) -$$
$$-\mu^2 \int_{\Omega_2} \frac{\overline{\psi_1(t)}\psi_2(t) dt}{u(x)v(t) - \lambda} \cdot \int_{\Omega_2} \frac{\psi_1(t)\overline{\psi_2(t)} dt}{u(x)v(t) - \lambda}, \ \ \lambda \in \rho(H_0).$$

В пространстве $L_2(\Omega_1)$ рассмотрим семейство $\{H_1(\alpha)\}_{\alpha \in \Omega_2}$ самосопряженных операторов в модели Фридрихса (см. [21])

$$H_1(\alpha)\varphi(x) = u(x)v(\alpha)\varphi(x) - \gamma \int_{\Omega_1} \left(\varphi_1(x)\overline{\varphi_1(s)} + \varphi_2(x)\overline{\varphi_2(s)}\right) \varphi(s) ds.$$

Аналогично определим в $L_2(\Omega_2)$ семейство операторов $\{H_2(\beta)\}_{\beta\in\Omega_1}$:

$$H_2(\beta)\psi(y) = u(\beta)v(y)\psi(y) - \int_{\Omega_2} \left(\psi_1(y)\overline{\psi_1(t)} + \psi_2(y)\overline{\psi_2(t)}\right)\psi(t)dt.$$

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in \Omega$ – произвольное. Число $\lambda \in (-\infty, 0)$ является собственным значением оператора $H_1(\alpha)$ (оператора $H_2(\alpha)$) тогда и только тогда, когда число $\xi = 1$ является собственным значением компактного оператора $\gamma K_1(\alpha;\lambda)$ $(\mu K_2(\alpha;\lambda))$, где*

$$K_1(\alpha;\lambda)\varphi(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{\varphi_1(x)\overline{\varphi_1(s)} + \varphi_2(x)\overline{\varphi_2(s)}}{\sqrt{v(\alpha)u(x)-\lambda}\cdot\sqrt{v(\alpha)u(s)-\lambda}}\varphi(s)ds,$$

$$K_2(\alpha;\lambda)\varphi(y) = \int\limits_{\Omega} \frac{\psi_1(y)\overline{\psi_1(t)} + \psi_2(y)\overline{\psi_2(t)}}{\sqrt{v(\alpha)u(y)-\lambda}\cdot\sqrt{v(\alpha)u(t)-\lambda}}\varphi(s)ds,$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in \Omega$ – фиксировано. Докажем лемму для оператора $H_1(\alpha)$, а для оператора $H_2(\alpha)$ можно доказать аналогично.

а) Необходимость. Допустим, что число $\lambda < 0$ является собственным значением оператора $H_1(\alpha)$. Тогда существует $f_0 \in L_2(\Omega)$, $f_0 \neq \theta$, что

$$(v(\alpha)u(x) - \lambda)f_0(x) - \gamma P_1 f_0(x) = 0, \tag{8}$$

где P_1 – интегральный оператор в $L_2(\Omega)$, заданный равенством

$$P_1\varphi(x) = \int\limits_{\Omega}(\varphi_1(x)\overline{\varphi_1(s)} + \varphi_2(x)\overline{\varphi_2(s)})\varphi(s)ds.$$

В силу обратимости оператора $U_{\alpha,\lambda}$:

$$U_{\alpha,\lambda}\varphi(x) = \sqrt{v(\alpha)u(x)-\lambda}\varphi(x)$$

из (8) получим, что

$$U_{\alpha,\lambda}f_0 - \gamma U_{\alpha,\lambda}^{-1}P_1 f_0 = 0. \tag{9}$$

Положим $g_0(x) = U_{\alpha,\lambda}f_0(x)$. Тогда $g_0 \in L_2(\Omega)$, $g_0 \neq \theta$ и $f_0 = U_{\alpha,\lambda}^{-1}g_0 \neq \theta$. Следовательно, равенство (9) имеет вид

$$g_0 - \gamma U_{\alpha,\lambda}^{-1}P_1(U_{\alpha,\lambda}^{-1}g_0) = 0.$$

Отсюда получим, что

$$\gamma K_1(\alpha;\lambda)g_0 = g_0,$$

т.е. число 1 является собственным значением оператора $\gamma K_1(\alpha;\lambda)$.

б) Достаточность доказывается аналогично. ▲

Лемма 2. *Пусть $\alpha \in \Omega$ - произвольное. Число $\lambda \in (-\infty, 0)$ является собственным значением оператора $H_1(\alpha)$ (оператора $H_2(\alpha)$) тогда и только тогда, когда $\triangle_1(\alpha;\lambda,\gamma) = 0$ $(\triangle_2(\alpha;\lambda,\mu) = 0)$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \Omega$ и $\lambda \in (-\infty, 0)$ фиксированы. Легко заметить, что для детерминантов Фредгольма $D_1(\alpha; \lambda, \gamma)$ и $D_2(\alpha; \lambda, \mu)$ оператора $E - \gamma K_1(\alpha; \lambda)$ и $E - \mu K_2(\alpha; \lambda)$ имеет место равенство

$$D_1(\alpha; \lambda, \gamma) = \Delta_1(\alpha; \lambda, \gamma), \;\; D_2(\alpha; \lambda, \mu) = \Delta_2(\alpha; \lambda, \mu).$$

Следовательно, из Теорема 1 и в силу теоремы Фредгольма (см. Теорема 4, стр.34 [22]) вытекает утверждение Леммы.

Лемма 3. *Число* $\lambda = -\gamma \;\; (\lambda = -\mu)$ *является решением уравнения* $\Delta_1(y_k^{min}; \lambda, \gamma) = 0$, $(\Delta_2(y_k^{min}; \lambda, \mu) = 0), k = 1, 2, ..., m.$

В случае $\alpha = y_k^{\min}$ уравнение $\Delta_1(\alpha; \lambda, \gamma) = 0$ имеет простой вид:

$$\left(1 + \frac{\gamma}{\lambda}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{\lambda}\right) = 0,$$

т.е. число $\lambda = -\gamma$ является решением уравнения $\Delta_1(y^{\min}; \lambda, \gamma) = 0$.

Лемма 4. *Функция*

$$\pi_j(t) = \inf_{\|\psi\|=1} (H_j(t)\psi, \psi), \;\; t \in \Omega \;\; (j = 1, 2) \tag{10}$$

является неположительной и непрерывной на Ω.

Доказательство. Докажем лемму для операторов $\{H_1(\alpha)\}_{\alpha\in\Omega}$, а для операторов $\{H_2(\alpha)\}_{\alpha\in\Omega}$ она доказывается аналогично.

В силу положительности интегрального оператора P_1 имеем

$$\pi_1(t) = \inf_{\|\psi\|=1} (H_1(t)\psi, \psi) = \inf_{\|\psi\|=1} [(h_t\psi, \psi) - \gamma(P_1\psi, \psi)] \leq \inf_{\|\psi\|=1} (h_t\psi, \psi) = 0, \;\; t \in \Omega,$$

где оператор $h_\alpha \;\; (\alpha \in \Omega)$ действует в $L_2(\Omega)$ по формуле

$$h_\alpha \varphi(x) = v(\alpha) u(x) \varphi(x).$$

Положим $M_0 = \sup\limits_{x,y\in\Omega} u(x)v(y) = u_{max} v_{max}$. Для каждого $\alpha \in \Omega$ рассмотрим оператор $\widetilde{H_1}(\alpha)$:

$$\widetilde{H_1}(\alpha) = H_1(\alpha) - M_0 \cdot E.$$

Имеем $\widetilde{H_1}(\alpha) \leq \theta, \;\; \alpha \in \Omega$, т.е. $(\widetilde{H_1}(\alpha)\psi, \psi) \leq 0, \;\; \forall \psi \in L_2(\Omega), \;\; \alpha \in \Omega$. Определим функцию $\widetilde{\pi}_1(t)$ следующим образом

$$\widetilde{\pi}_1(t) = \inf_{\|\psi\|=1} (\widetilde{H_1}(t)\psi, \psi) \;\; t \in \Omega.$$

Очевидно, что

$$\widetilde{\pi}_1(t) = \inf_{\|\psi\|=1} (\widetilde{H_1}(t)\psi, \psi) = - \sup_{\|\psi\|=1} (-\widetilde{H_1}(t)\psi, \psi) = -\|\widetilde{H_1}(t)\|, \;\; t \in \Omega.$$

Положим $v_1(t) = \|\widetilde{H_1}(t)\|,\ \ t \in \Omega$. Покажем, что функция $v_1(t)$ является непрерывной на Ω. Для произвольного $t, t_0 \in \Omega$ имеем

$$|v_1(t) - v_1(t_0)| = |\|\widetilde{H_1}(t)\| - \|\widetilde{H_1}(t_0)\|| \leq \|\widetilde{H_1}(t) - \widetilde{H_1}(t_0)\| = \|h_t - h_{t_0}\| =$$

$$= \sup_{x\in\Omega} u(x) \cdot |v(t) - v(t_0)| = u_{max} \cdot |v(t) - v(t_0)|.$$

Отсюда и из непрерывности функции $v(t)$ на Ω следует непрерывность функции $v_1(t)$. Следовательно, функция $\widetilde{\pi}_1(t)$ является непрерывной на Ω. Однако, имеем

$$\widetilde{\pi}_1(t) = \pi_1(t) - M_0.$$

Отсюда вытекает непрерывность функции $\pi_1(t)$. ▲

3. СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРЫ W_1 И W_2

В пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ определим следующие самосопряженные операторы

$$W_1 = H_0 - T_1,\ \ W_2 = H_0 - T_2.$$

Легко заметить, что для операторов W_1 и W_2 отсутствует [16] дискретный спектр, т.е. $\sigma(W_k) = \sigma_{ess}(W_k),\ \ k = 1, 2$.

Обозначим

$$u_{\max} = \max_{x\in\Omega_1} u(x),\ \ v_{\max} = \max_{y\in\Omega_2} v(y),$$

$$\pi_1^{\max} = \max_{t\in\Omega_2} \pi_1(t) \ \text{ и } \ \pi_2^{\max} = \max_{s\in\Omega_1} \pi_2(s).$$

Теорема 2. Для операторов W_1 и W_2 справедливы следующие соотношения:

1) $E_{\min}(W_1) = -\gamma$, и $[-\gamma, \pi_1^{\max}] \subset \sigma_{ess}(W_1)$;

2) $E_{\min}(W_2) = -\mu$, и $[-\mu, \pi_2^{\max}] \subset \sigma_{ess}(W_2)$;

Доказательство. В силу положительности операторов H_0 и T_1 для произвольного $f \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2),\ \ \|f\| = 1$, имеем

$$(W_1 f, f) = ((H_0 - T_1)f, f) = (H_0 f, f) - (T_1 f, f) \geq -(T_1 f, f) \geq -\gamma,$$

так как $\|T_1\| = \gamma$. Следовательно, получим, что $E_{\min}(W_1) \geq -\gamma$. Однако, в силу Леммы 3 и по определению множества σ_1 имеем $-\gamma \in \sigma_1$. Следовательно, $E_{\min}(W_1) = -\gamma$, так как $\sigma_{disc}(W_1) = \varnothing$ [17].

Определим проектор V_1 в $L_2(\Omega_1)$, заданный равенством

$$V_1\varphi(x) = \int_{\Omega} (\varphi_1(x)\overline{\varphi_1(s)} + \varphi_2(x)\overline{\varphi_2(s)})\varphi(s)ds.$$

Очевидно, что $\|V_1\| = 1$. В пространстве $L_2(\Omega_1)$ определим семейство мультипликаторов $\{h_\alpha\}_{\alpha\in\Omega_2}$: $h_\alpha\varphi(x) = u(x)v(\alpha)\varphi(x)$. Из положительности операторов h_α, $\alpha \in \Omega_2$ для функции $\pi_1(t)$ имеем

$$\pi_1(t) = \inf_{\|\psi\|=1}(H_1(t)\psi, \psi) = \inf_{\|\psi\|=1}((h_t\psi, \psi) - \gamma(V_1\psi, \psi)) \geq$$

$$\geq \inf_{\|\psi\|=1}(-\gamma(V_1\psi, \psi)) = -\gamma, \ \ t \in \Omega_2.$$

Тогда, $\pi_1(y^{\min}) = -\gamma \sup\limits_{\|\psi\|=1}(V_1\psi, \psi) = -\gamma$. Следовательно, получим, что $\pi_1^{\min} = \pi_1(y^{\min}) = -\gamma$ и $\pi_1^{\min} = E_{\min}(W_1) \in \sigma_{ess}(W_1)$.

Пусть $\pi_1(t_0) < 0$, $t_0 \in \Omega_2$. Тогда в силу принципа минимакса [23, 24] получим, что $\pi_1(t_0) \in \sigma(H_1(t_0))$, и $\pi_1(t_0)$ является собственным значением оператора $H_1(t_0)$, так как $\sigma_{ess}(H_1(t_0)) = [0, M(t_0)]$, где $M(t) = u_{\max}\cdot v(t)$. Отсюда получим, что $\Delta_1(t_0; \pi_1(t_0), \gamma_0, \gamma) = 0$. Тогда по определению множества σ_1 имеем $\pi_1(t_0) \in \sigma_1$. Следовательно, из равенства (5) вытекает, что $\pi_1(t_0) \in \sigma_{ess}(W_1)$, так как $\sigma_{disc}(W_1) = \varnothing$. Однако, имеем $\sigma_0 = \sigma(H_0) = [0, u_{\max}\cdot v_{\max}] \subset \sigma_{ess}(W_1)$. Таким образом, в силу равенства (5) получим

$$[-\gamma, \pi_1^{\max}] \cup [0, u_{\max}\cdot v_{\max}] \subset \sigma_{ess}(W_1).$$

Аналогично доказывается, что

$$[-\mu, \pi_2^{\max}] \cup [0, u_{\max}\cdot v_{\max}] \subset \sigma_{ess}(W_2).$$

Следствие. *Для нижней грани $E_{\min}(H)$ существенного спектра оператора H (7) имеет место равенство*

$$E_{\min}(H) = \min\{-\gamma, -\mu\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений, – М., Л., 1948.
2. Александров В.М., Коваленко Е.В. Об дом классе интегральных уравнений смешанных задач механики сплошных сред, – ДАН СССР, 1980, Т.252, вып.3, С.324–328.
3. Александров В.М., Коваленко Е.В. О контактном взаимодейтствии тел с покрытиями, – ДАН СССР, 1984, Т.275, вып.4, С.827–830.
4. Манжиров А.В. Об одном методе решения двумерных интегральных уравнений осесимметричных контактных задач для тел со сложной реологией – Прикл. мат. и мех., 1985, Т.43, вып.6, С.1019–1025.
5. Калитвин А.С. О некоторых классах частично интегральных уравнений в аэродинамике, – Сост. Персп. Разв. Науки и Технике под Липецком обл., Липец, 1994, С.210–212.
6. Гурса Э. Курс математического анализа, Т.3., Ч2, – М.– Л., 1934.
7. Мюнтц Г. Интегральные уравнения, Т.1, – Л.–М., 1934.
8. Appell J., Kalitvin A.S., Nashed M.Z. On some Partial Integral Equations arising in the mechanics of solids, Zeitschr. Angew. Math. Mech. – 1999, v.79, є 10., P.703-713.
9. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами, – Воронеж, 2000.
10. Appell J., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations, – New York, 2000.
11. Ю.Х. Эшкабилов. Об одном дискретном "трехчастичном"операторе Шредингера в модели Хаббарда, – ТМФ, 149:2, 2006, С.228–243.
12. S. Albeverio, S.N. Lakaev, Z.I. Muminov. On the Number of Eigenvalues of a Model Operator Associated to a System of Three-Particles on Lattices, – Russ. J. of Math. Phys., 14:4, 2007, P.377–387.
13. Т.Х. Расулов. Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке, - ТМФ, 163:1, 2010, С.34-44.
14. Ю.Х. Эшкабилов, Р.Р. Кучаров. О существенном и дискретном спектре трехчастичного оператора Шредингера на решетке, – ТМФ, 170:3, 2012, С.409–422.
15. Р.Р. Кучаров, Т.М.Мирзаева. О разрешимость одного частично интегрального уравнений типа Фредгольма, – Научный вестник НамГУ, 2022, є9,С.11–17.
16. Ю.Х. Эшкабилов, Р.Р. Кучаров. О конечности отрицательных собственных значений частично интеграьного оператора, – Мат. труды, 2014, Т.17, вып.1, С.128–144.
17. Ю.Х. Эшкабилов. Эффект Ефимова для одного модельного "трехчастичного"дискретного оператора Шредингера, – ТМФ, 164:1, 2010, С.78–87.

18. Ю.Х. Эшкабилов. Существенный и дискретный спектры частично интегральных операторов, – Мат. труды, 11:2, 2008, С.187–203.

19. Ю.Х. Эшкабилов. Возмущение спектра оператора умножения на функцию с частным интегральным оператором, – Вестник НУУз, вып.2, 2006, С.17–21.

20. Ф.Трикоми. Интегральные уравнения, ИЛ, М, 1960.

21. Л. Д. Фаддеев. О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра, Краевые задачи математической физики, вып.2, Сборник работ, – Тр. МИАН СССР, 73, Наука, М.– Л., 1964, С.292–313.

22. Ф.Трикоми. Интегральные уравнения, ИЛ, М, 1960.

23. М.Рид, Б.Саймон. Методы современной математической физики – Т.4, Анализ операторов, – М.; Мир, 1982.

24. Ю.Х. Эшкабилов. О бесконечности дискретного спектра операторов в модели Фридрихса, – Мат. Труды, 2011, Т.14, вып.1, С. 195–211.