MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

QO‘LDOSHEV QOBILJON QO‘LDOSHEVICH

VAZNLI m-SUBGARMONIK O‘LCHOVLAR

01.01.01 – Matematik analiz

fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Toshkent – 2025

УДК: 517.57

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Содержание автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of the abstract of the dissertation for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) in Physical and Mathematical Sciences

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

QO‘LDOSHEV QOBILJON QO‘LDOSHEVICH

VAZNLI m-SUBGARMONIK O‘LCHOVLAR

01.01.01 – Matematik analiz

fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Toshkent – 2025

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida № B2025.3.PhD/FM1345 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz(rezyume)) ilmiy kengash veb-sahifasi (http://ik-fizmat.nuu.uz) va "ZiyoNet" ta'lim axborot tarmog'iga (http://www.ziyonet.uz/) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Raximov Karim Xoshimovich** Fizika-matematika fanlari doktori, katta ilmiy xodim
Rasmiy opponentlar:	**Raximov Abdug'afur Abdumadjidovich** Fizika-matematika fanlari doktori, professor **Sharipov Rasulbek Axmedovich** Fizika-matematika fanlari bo'yicha PhD, dotsent
Yetakchi tashkilot:	**Toshkent shahridagi Turin politexnika universiteti**

Dissertatsiya himoyasi Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 raqamli ilmiy Kengashning 2026-yil "8" yanvar soat 11^00 dagi majlisida bo'lib o'tadi (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel: +998-71-227-12-24, faks: +998-71-246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz)

Dissertatsiya bilan Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (251-raqam bilan ro'yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel: +998-71-246-02-24.

Dissertatsiya avtoreferati 2025-yil "29" dekabr kuni tarqatildi.
(2025-yil "29" dekabr dagi 2-raqamli reestr bayonnomasi)

OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI * O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI * MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI

O.S. Zikirov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi,
f.-m.f.d., professor

R.M.Jo'rayev
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash kotibi,
f.-m.f.f.d (PhD)

R.N.Ganixodjayev
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash huzuridagi
Ilmiy seminar raisi,
f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida pluripotensiallar nazariyasi matematikaning eng muhim va dolzarb yo‘nalishlaridan biri sifatida jadal rivojlanib bormoqda. Haqiqatdan ham, zamonaviy matematikada, jumladan, ko‘p o‘zgaruvchili kompleks dinamik sistemalar yo‘nalishida olib borilayotgan ilmiy tadqiqotlar aksariyat hollarda pluripotensiallar nazariyasi masalalariga keltiriladi. Bu soha nafaqat sof matematika uchun, balki elektrostatika, kvant mexanikasi, gidrodinamika va boshqa ko‘plab amaliy fanlar uchun ham muhim ahamiyatga ega. Potensiallar va pluripotensiallar nazariyalarining tadqiqot ob’yektlaridan hisoblanadigan Laplas, Monje-Amper operatorlari va mos ravishda ushbu operatorlar orqali tahlil qilinadigan subgarmonik, plurisubgarmonik funksiyalar, shuningdek, ular bilan bog‘liq o‘lchov va sig‘im tushunchalari chuqur o‘rganilmoqda va bu tushunchalar zamonaviy matematikaning aktual masalalaridan biri hisoblanadi.

Jahonda, so‘ngi yillarda, Laplas va Monje-Amper operatorlarining umumlashtirilgan holi kompleks Gessian operatori va uning yordamida aniqlanadigan m-subgarmonik funksiyalar hamda m-subgarmonik funksiyalar sinfida aniqlanadigan $\mathcal{P}_m$-o‘lchov va m-sig‘im tushunchalari pluripotensiallar nazariyasining asosiy va zamonaviy obyektlariga aylandi va bu yo‘nalishda ilmiy izlanishlar olib borilmoqda. m-subgarmonik funksiyalar nazariyasida vaznli m-subgarmonik o‘lchovlarni va ular bilan bog‘liq sig‘imlarning xossalari hamda ular yordamida kompaktlarning regulyarlik xossalari, xususan, kompaktning Gyolder regulyarligini va chegaradagi holatini o‘rganish matematik fizika masalalarida, ko‘p kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasida hamda kompleks dinamik sistemalar yo‘nalishlarida dolzarb masalalardan hisoblanadi. Haqiqatan ham, kompleks Gessian operatoriga $K \subset \mathbb{C}^n$ kompaktning biror $D \supset K$ sohaga nisbatan vaznli m-subgarmonik o‘lchovni ta’sir ettirsak, havzasi kompaktda joylashgan o‘lchovga ega bo‘lamiz. Bunday o‘lchovlar esa kompleks dinamik sistemalarda muhim ahamiyat kasb etadi. Bularning barchasi qaralayotgan masalaning naqadar dolzarbligi va zarurligini ko‘rsatadi.

Mamlakatimizda, ayniqsa, oxirgi yillarda fundamental fanlarni, xususan kompleks analiz va potensiallar nazariyasini rivojlantirishga alohida e’tibor qaratilmoqda. Akademik A. Sadullaev maktabi tomonidan boshlangan m-subgarmonik funksiyalar nazariyasiga oid tadqiqotlar hozirda xalqaro miqyosda e’tirof etilgan. “Haqiqiy o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi, Kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi” fanlarining ustuvor yo‘nalishlarida xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqot ishlari ko‘lamini kengaytirish, ularning natijadorligi va amaliy ahamiyatini oshirish matematika fanining faoliyat yo‘nalishlari hamda muhim vazifalari sifatida belgilab berilgan[1]. Shu nuqtayi nazardan, vaznli m-subgarmonik o‘lchovlar va sig‘imlarning asosiy xossalarini

[1] O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017-yil 18-maydagi “O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy-tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish to‘g‘risida”gi 292-sonli qarori.

o‘rganish, shuningdek, ularning yangi qo‘llanilish sohalarini aniqlash nazariy hamda amaliy jihatdan muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

Ushbu dissertatsiya ishida olib borilgan tadqiqotlar O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4947 sonli Farmoni, 2017-yil 17-fevraldagi “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2789 sonli va 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708 sonli Qarorlarida, shuningdek, mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan masalalarni hal etishga muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlantirishining ustuvor yo‘nalishlari bilan mosligi. Ushbu dissertatsiya ishi O‘zbekiston Respublikasining fan va texnologiyalarni rivojlantirishning IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Potensialar nazariyasining asosiy obyekti subgarmonik funksiyalar bo‘lgani kabi, pluripotensiallar nazariyasining ham asosiy obyektlaridan biri plurisubgarmonik funksiyalardir. Bu sinfda kiritilgan plurisubgarmonik o‘lchov ($\mathcal{P}$-o‘lchov) kompleks Green funksiyasiga o‘xshash bir qancha muhim xossalarga ega bo‘lib, undan chegaraviy masalalarni yechishda keng foydalaniladi. Bundan tashqari, $\mathcal{P}$-o‘lchov kompakt to‘plamning regulyarlik va lokal regulyarlik xossalarini o‘rganishda qo‘llanilib, regulyar kompaktlardan plurisubgarmonik funksiyalar sinfida kiritiladigan sig‘imlarning tadqiq qilishda samarali foydalanilgan. Ushbu tadqiqot natijalarini Bedford-Teylor, Sadullayev va boshqa taniqli olimlarning ishlarida ko‘rishimiz mumkin.

XXI asr boshlarida pluripotensiallar nazariyasi asosida yangi yo‘nalish – m-subgarmonik funksiyalar (sh_m) sinfida potensiallar nazariyasi shakllandi. Bu sinf subgarmonik va plurisubgarmonik funksiyalar orasida oraliq o‘rinni egallab, ularning tabiiy umumlashmasi hisoblanadi. Haqiqatan ham, $m=1$ holida subgarmonik, $m=n$ holida esa plurisubgarmonik funksiyalar sinfi hosil bo‘ladi.

m-subgarmonik funksiyalar tushunchasini birinchi marta fanga Z. Blocki kiritgan bo‘lib, u bu sinfning asosiy xossalarini isbotladi. Keyinchalik, A. Sadullaev va B. Abdullaev tomonidan sh_m funksiyalar sinfida potensiallar nazariyasi chuqur o‘rganildi. Shuningdek, m-subgarmonik o‘lchov tushunchasi kiritilib, ularning asosiy xossalari tadqiq qilindi hamda m-subgarmonik o‘lchov yordamida m-subgarmonik funksiyalar sinfida turli xil sig‘im tushunchalari kiritildi va ularning ham qator xossalari isbotlandi. Mazkur sinf ko‘p o‘zgaruvchili haqiqiy analiz va differensial geometriyada keng qo‘llanilmoqda. Xususan, m-subgarmonik funksiyalar va m-subgarmonik o‘lchov yordamida ko‘p haqiqiy o‘zgariluvchili m-qavariq funksiyalar sinfi o‘rganilib, bu sinfda Dirixle masalasi yechilgan.

Z. Blocki, S. Kolodziej, S. Dinev, X. Ch. Lu, A. Sadullayev va B. Abdullaevlarning ishlari m-subgarmonik funksiyalar nazariyasining rivojlanishiga katta hissa qo‘shgan bo‘lib, bugungi kunda ham Fransiya, Polsha, Xitoy, O‘zbekiston olimlari va boshqa ko‘plab taniqli olimlar tomonidan m -subgarmonik funksiyalar sinfida faol tadqiqotlar olib borilmoqda.

Plurisubgarmonik funksiyalar sinfida vaznli kompleks Green funksiyasi bilan J. Sichak, V. Zaharyuta, A. Sadullayev kabi yetuk olimlar shug‘ullanishgan va muhim natijalar olishgan. Biroq, plurisubgamonik funksiyalar sinfida vaznli $\mathcal{P}$ -o‘lchov o‘rganilmagan. Hattoki, Gyolder uzluksizlik masalasi vaznsiz holatda ham nafaqat $\mathcal{P}$ -o‘lchov uchun balki, subgarmonik funksiyalar sinfida kiritiladigan garmonik o‘lchov uchun ham shu vaqtgacha o‘rganilmagan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasisining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Tadqiqot O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligining ilmiy-tadqiqot granti IL-5421101746 raqamli rejalashtirilgan mavzuga muvofiq ravishda, Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetida amalga oshirildi.

Tadqiqotning maqsadi vaznli m-subgarmonik o‘lchovlarning xossalarini o‘rganish va ular yordamida kompakt to‘plamlarning regulyarligini hamda vaznli sig‘imlarni tadqiq etishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari quyidagilardan iborat:

vaznli m-subgarmonik o‘lchovga ta’rif berish va uning xossalarini o‘rganish;

vaznli m-subgarmonik o‘lchov yordamida kompakt to‘plamning lokal (m,ψ) -regulyarligi va (m,ψ)-regulyarligini o‘rganish;

m -subgarmonik o‘lchovning vaznli hamda vaznsiz hollar uchun Gyolder uzluksizligini tadqiq etish;

$\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-sig‘im tushunchasini kiritish va uni klassik $\mathcal{P}_m$-sig‘im bilan solishtirib, asosiy xossalarini aniqlash;

(m,ψ)-sig‘im tushunchasini kiritish va uning asosiy xususiyatlarini o‘rganish;

$\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-sig‘im bilan (m,ψ)-tashqi sig‘im orasidagi bog‘lanishni tahlil qilish.

Tadqiqot obyekti m-subgarmonik funksiyalar, m-subgarmonik o‘lchov, vaznli m -subgarmonik o‘lchov, vaznli m -Green funksiyasi hamda pluripotensiallar nazariyasidagi vaznli sig‘imlardan iborat.

Tadqiqot predmeti. Kompakt to‘plamlarning regulyarligini va vaznli (m,ψ) -subgarmonik o‘lchovlarning potensial xossalarini o‘rganish hamda (m,ψ) -sig‘imlar va ularning asosiy xossalarini vaznli (m,ψ)-subgarmonik o‘lchovlar yordamida tahlil qilish.

Tadqiqot usullari. Tadqiqotda zamonaviy kompleks analiz, funksional analiz, umumiy topologiya, klassik potensiallar nazariyasi hamda pluripotensiallar nazariyasi usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

m -subgarmonik funksiyalar sinfida $K \subset D$ kompaktning chegaralangan $D \subset \mathbb{C}^n$ sohaga nisbatan vaznli m-subgarmonik o‘lchovi tushunchasi kiritilib, uning potensial xossalari isbotlangan;

vaznli m-subgarmonik o‘lchov yordamida kompakt to‘plamlarning lokal

(m,ψ) -regulyarlik va (m,ψ) -regulyarlik xossalariga oid teoremalardan $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$ -sig‘im bilan (m,ψ)-tashqi sig‘im orasidagi bog‘lanishni ifodalovchi tengsizlik keltirib chiqarilgan;

vaznli m -Green funksiyasi va vaznli m -subgarmonik o‘lchov kompakt to‘plamga nisbatan Gyolder uzluksiz va vazn funksiyasi kompaktda Gyolder uzluksiz bo‘lishidan, ular butun sohada ham Gyolder uzluksiz bo‘lishi ko‘rsatilgan;

m -subgarmonik funksiyalar sinfida $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$ -sig‘im va (m,ψ) -sig‘im tushunchalari kiritilishi natijasida muhim natijalar olingan va ularning bir qancha fizik, dinamik xossalari isbotlangan;

Tadqiqotning amaliy natijalari. Vaznli m-subgarmonik o‘lchov va uning xossalaridan chegaraviy masalalarni yechishda va kopleks dinamik sistemalarda ko‘phadsimon akslantirishlarning Julia to‘plamining regulyarlik xossalarini o‘rganishda foydalanishdan iborat. Shuningdek, ushbu dissertatsiyada keltirilgan natijalar va metodologiyalar oliy ta’lim muassasalarida magistratura va doktorantura talabalariga mo‘ljallangan maxsus kurslarga tatbiq etilishi mumkin.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi matematik fizika, klassik potensiallar nazariyasi va ko‘p kompleks o‘zgaruvchilar funksiyalari nazariyalaridagi mashhur usullardan foydalangan holda qat’iy matematik teoremlarning isboti bilan berilgani orqali asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati shundaki, vaznli (m,ψ) -subgarmonik o‘lchovlar kiritilib o‘rganildi. Ular yordamida vaznli (m,ψ)-sig‘im hamda $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-sig‘im tushunchalari ta’riflanib, ularning xossalari tahlil qilindi. Bundan tashqari, vaznli m -Green funksiyalar va vaznli m-subgarmonik o‘lchovlarning Gyolder uzluksizligi haqidagi teorema isbotlandi. Ushbu natijalar pluripotensiallar nazariyasining klassik tushunchalarini kengaytiradi va kompakt to‘plamlarning regulyarlik xususiyatlariga yangi yondashuvni beradi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati shundaki, ular kompakt to‘plamlarning regulyarlik xususiyatini va sig‘im tushunchasini chuqurroq anglashga yordam beradi hamda ko‘p kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi va kompleks dinamik sistemalarda turli xil masalalarni yechishda qo‘llash uchun asos bo‘lib xizmat qiladi. Bundan tashqari, bu natijalardan texnik, fizik va biologik jarayonlarni matematik modellashtirishda ham foydalanish mumkin.

Tadqiqot natijalarini joriy qilinishi. Vaznli m-subgarmonik o‘lchovlarni tadqiq qilish asosida olingan ilmiy natijalar quyidagi ilmiy loyihalarda qo‘llanilgan;

E to‘plamning D sohaga nisbatan (m,ψ)-subgarmonik o‘lchovi va (m,ψ) -sig‘imning xossalaridan Xorazm Ma’mun akademiyasida bajarilgan FA-F-4-002 shifrli “ m -subgarmonik funksiyalar va ularning kalibrlangan geometriyaga tadbiqlari” fundamental loyihasini bajarishda foydalanilgan (O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining mintaqaviy bo‘limi — Xorazm Ma’mun akademiyasining 2025-yil 7-oktyabrdagi 247/2-25-sonli ma’lumotnomasi). Ushbu ilmiy natijalarni qo‘llash vaznli m -potensiallar nazariyasini qurish va uni rivojlantirish imkoniyatini bergan;

tadqiqot ishidagi vaznli m-subgarmonik o‘lchovlarning potensial xossalarini o‘rganilishi va kompakt to‘plamlarning (m,ψ)-regularlik xossalari haqida olingan ilmiy xulosalardan Urganch davlat universitetida 2020-2022 yillarda amalga oshirilgan Yevropa Ittifoqining 610170-EPP-1-2019-1-ES-EPPKA2-CBHE-JP “O‘rta Osiyoda katta ilmiy ma’lumotlarni tahlil qilish bo‘yicha o‘quv-tadqiqot markazalari va kurslarni yaratish” loyihasida foydalanilgan (Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch davlat universitetining 2025-yil 11-noyabrdagi 06-201/4-sonli ma’lumotnomasi). Tadqiqot davomida olingan natijalar E to‘plamning vaznli m-sig‘imini tahlil qilish va baholash imkonini bergan. Ushbu dissertatsiyada keltirilgan natijalar va metodologiyalar oliy ta’lim muassasalarida magistratura va doktorantura talabalariga mo‘ljallangan maxsus kurslarga tatbiq etilgan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Tadqiqotning asosiy natijalari 5 ta xalqaro va 7 ta respublika miqiyosida tashkil etilgan ilmiy konferensiyalarda muhokama qilingan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha 20 ta ilmiy ish chop etilgan bo‘lib, ulardan 8 tasi O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasi tomonidan PhD dissertatsiyasini himoya qilish uchun tavsiya etilgan jurnallar ro‘yxatiga kiritilgan, 3 tasi xalqaro va 5 tasi milliy matematik jurnallarda chop etilgan. Ulardan 3 tasi SCOPUS axborot bazasiga kiritilgan va 12 ta tezis mavjud.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, o‘n bir paragrafni o‘z ichiga oluvchi uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 75 betni tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslab berilgan va tahlil qilingan. Tadqiqotning Respublikada fan va texnologiyalarni rivojlantirishning ustuvor yo‘nalishlariga muvofiqligi ko‘rsatilgan hamda muammoning o‘rganilganlik darajasi yoritilgan. Tadqiqotning maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti belgilab berilgan. Tadqiqotda olingan natijalarning ilmiy yangiligi va amaliy ahamiyati tasvirlangan, ularning nazariy va amaliy ahamiyati ko‘rsatib o‘tilgan. Bundan tashqari, tadqiqot natijalarining joriy etilishi, chop etilgan ishlar va dissertatsiyaning tuzilishi haqida batafsil ma’lumot berilgan.

Dissertatsiyaning birinchi bobi “Dastlabki tushunchalar” deb nomlanib, unda asosan keyingi boblarda ishlatiladigan asosiy va muhim tushunchalarning sharhi keltiriladi. Xususan, quyidagi tushunchalar ta’rifi keltirib o‘tilgan: differensial formalar, musbat oqimlar, subgarmonik funksiyalar, plurisubgarmonik funksiyalar, m-subgarmonik funksiyalar, m-polyar to‘plam, m-subgarmonik o‘lchov, $\mathcal{P}_m$-sig‘im, m-sig‘im. Shuningdek, ushbu bobda dissertatsiya mavzusi bo‘yicha ilgari isbotlangan va keyingi boblarda foydalaniladigan asosiy teoremalarga ham to‘xtalib o‘tiladi.

Dastlab, m-subgarmoniklik tushunchasi C^2 sinfda kiritiladi. Aytaylik,

$D \subset \mathbb{C}^n$ chegaralangan soha bo‘lsin.

Ta’rif 1.2.4. Haqiqiy qiymatli $u \in C^2(D)$ funksiya uchun D sohaning har bir nuqtasida quyidagi

$$(dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k} \geq 0, \quad \forall k = 1,2,\ldots,n-m+1,$$

shartlar o‘rinli bo‘lsa, u funksiya D sohada m-*subgarmonik* deyiladi, bu yerda $d = \partial + \bar{\partial}, \quad d^c = \dfrac{\partial - \bar{\partial}}{4i}$ va $\beta = dd^c |z|^2$.

Ta’rif 1.2.4 yordamida m -subgarmoniklik tushunchasini lokal integrallanuvchi funksiyalar sinfida ham aniqlash mumkin.

Ta’rif 1.2.5. Haqiqiy qiymatli, lokal integrallanuvchi $u \in L^1_{\text{loc}}(D)$ funksiya D sohada yuqoridan kuchli yarim uzluksiz bo‘lib hamda $C^2(D)$ sinfdan olingan ixtiyoriy m-subgarmonik $v_1, v_2, \ldots, v_{n-m}$ funksiyalar uchun quyidagi oqim

$$dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge dd^c v_2 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1}$$

musbat aniqlangan bo‘lsa, ya’ni ixtiyoriy nomanfiy finit funksiya $\omega \in F^{0,0}(D)$ uchun

$$\int_D u \wedge dd^c v_1 \wedge dd^c v_2 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1} \wedge dd^c \omega \geq 0$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda u funksiya D sohada m-*subgarmonik* deyiladi. Agar har bir $G \Subset D$ soha uchun shunday $\varepsilon > 0$ son topilib, $u(z) - \varepsilon |z|^2$ funksiya G sohada m -subgarmonik bo‘lsa, u holda u funksiya D sohada *qat’iy* m -*subgarmonik* deyiladi.

D sohadagi m -subgarmonik funksiyalar sinfi $sh_m(D)$ bilan belgilanadi. Shuningdek, $u \equiv -\infty$ funksiya ham m-subgarmonik funksiyalar sinfiga kiritiladi.

m -subgarmonik o‘lchov tushunchasi m -subgarmonik funksiyalar sinfida ekstremal funksiya sifatida aniqlanadi. Faraz qilaylik, D chegaralangan va m -regulyar soha bo‘lsin, ya’ni

$$\exists \rho \in sh_m(D) : \rho|_D < 0, \lim_{\substack{z \to \partial D \\ z \in D}} \rho(z) = 0.$$

D sohada ixtiyoriy $E \subset D$ fiksirlangan to‘plam berilgan bo‘lsin. Quyidagi

$$\omega_m(z, E, D) = \sup\{u(z) : u \in sh_m(D), \quad u|_E \leq -1, \quad u|_D < 0\}$$

funksiyani aniqlaylik.

Ta’rif 1.3.2. Ushbu

$$\omega_m^*(z, E, D) = \overline{\lim_{w \to z}} \omega_m(w, E, D)$$

funksiyaga E to‘plamning D sohaga nisbatan m-*subgarmonik o‘lchovi* ($\mathcal{P}_m -$ *o‘lchov*) deyiladi.

$D \subset \mathbb{C}^n$ sohada ixtiyoriy fiksirlangan K kompakt berilgan bo‘lsin.

Ta’rif 1.3.3. Agar $z^0 \in K$ nuqta uchun

$$\omega_m^*(z^0, K, D) = -1$$

tenglik bajarilsa, z^0 nuqtaga K kompaktning m-*regulyar* nuqtasi deyiladi. Agar $z^0 \in K$ va har qanday $B = B(z^0, r) \subset \mathbb{C}^n$ shar uchun

$$\omega_m^*(z^0, K \cap \bar{B}, D) = -1$$

tenglik bajarilsa, z^0 nuqtaga K kompaktning *lokal* m*-regulyar* nuqtasi deyiladi. Agar K kompaktning barcha nuqtalari m-regulyar (yoki lokal m-regulyar) bo‘lsa, K ni m*-regulyar* (yoki *lokal* m*-regulyar*) kompakt deyiladi.

Ikkinchi bobda vanli m-subgarmonik o‘lchov tushunchasi kiritilib, uning bir qancha potensial xossalari shuningdek, kompakt to‘plamning vazn funksiyasiga nisbatan regulyarligiga doir bir qancha teoremalar isbotlangan. Bundan tashqari, agar vaznli m-subgarmonik o‘lchov kompaktga nisbatan Gyolder uzluksiz bo‘lsa, u holda uning D sohada Gyolder uzluksiz bo‘lishini isbotladik. Xuddi shuningdek, agar vaznli m-Green funksiyasi kompaktga nisbatan Gyolder uzluksiz bo‘lsa, u holda uning hamma yerda Gyolder uzluksiz bo‘lishini ham isbotladik.

Aytaylik, $D \subset \mathbb{C}^n$ chegaralangan m-regulyar soha bo‘lib, $E \subset D$ ixtiyoriy to‘plam va E to‘plamda chegaralangan hamda manfiy $\psi(z)$ funksiya berilgan bo‘lsin. Yuqoridagi usul asosida quyidagi funksiyani aniqlaymiz:

$$\omega_m(z, E, D, \psi) = \sup\{u(z) : u \in sh_m(D), \quad u|_E \le \psi|_E, \quad u|_D < 0\}.$$

Ta’rif 2.1.1. Ushbu

$$\omega_m^*(z, E, D, \psi) = \overline{\lim_{w \to z}} \omega_m(w, E, D, \psi)$$

funksiyaga E to‘plamning D sohaga nisbatan ψ *vanli* m*-subgarmonik o‘lchovi* ($\mathcal{P}_{(m,\psi)}$*-o‘lchov*) deyiladi.

Shuni ta’kidlash joizki, $\omega_m^*(z, E, D, -1)$ (ya’ni $\psi \equiv -1$) funksiya potensiallar nazariyasidagi m-subgarmonik o‘lchov bilan mos tushadi, ya’ni

$$\omega_m^*(z, E, D, -1) = \omega_m^*(z, E, D).$$

Tasdiq 2.1.4. *Har qanday* $E \subset D$ *to‘plam va barcha* $z \in D$ *nuqtalar uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli*

$$-\inf_{w \in E} \psi(w) \cdot \omega_m^*(z, E, D) \le \omega_m^*(z, E, D, \psi) \le -\sup_{w \in E} \psi(w) \cdot \omega_m^*(z, E, D).$$

Agar shunday $u \in sh_m(D)$ funksiya mavjud bo‘lib, u quyidagi

$$u \not\equiv -\infty, \quad u|_E = -\infty$$

shartlarni bajarsa, E to‘plam D sohada m*-polyar* deyiladi. Tasdiq 2.1.4 dan kelib chiqadiki, $\omega_m^*(z, E, D, \psi)$ funksiya yoki hech qayerda nolga teng emas, yoki aynan nolga teng. Ikkinchi holatning bajarilishi uchun E to‘plamning m-polyar bo‘lishi zarur va yetarli.

Teorema 2.1.7. *Quyidagi mulohazalar o‘rinli:*

a). Aytaylik, $E \subset\subset D_1$ *va* $D_j \subset D_{j+1}$ *bo‘lib,* $\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j = D$*, bu yerda* $j \in \mathbb{N}$. *U holda*

$$\lim_{j \to \infty} \omega_m^*(z, E, D_j, \psi) = \omega_m^*(z, E, D, \psi).$$

b). Aytaylik, $E \subset D$ *ixtiyoriy to‘plam bo‘lsin. Agar* $\psi(z)$ *funksiya* E *ning biror atrofida quyidan yarim uzluksiz bo‘lsa, u holda monoton kamayuvchi* $U_j \supset E$ *ochiq to‘plamlar ketma-ketligi mavjud bo‘lib, quyidagi munosabat o‘rinli:*

$$\left(\lim_{j\to\infty}\omega_m^*(z,U_j,D,\psi)\right)^* = \omega_m^*(z,E,D,\psi).$$

c). Aytaylik, $U\subset D$ ochiq to'plam bo'lsin. Agar $U=\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j$ bo'lib, K_j kompakt to'plamlar o'suvchi va $\psi(z)$ funksiya U to'plamda yuqoridan yarim uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\omega_m^*(z,K_j,D,\psi)\downarrow\omega_m^*(z,U,D,\psi).$$

$D\subset\mathbb{C}^n$ sohada ixtiyoriy fiksirlangan K kompakt berilgan bo'lsin.

Ta'rif 2.2.2. Agar $z^0\in K$ nuqta uchun

$$\omega_m^*(z^0,K,D,\psi)=\psi(z^0)$$

tenglik bajarilsa, z^0 nuqtaga K kompaktning (m,ψ)-*regulyar* nuqtasi deyiladi. Agar $z^0\in K$ va har qanday $B=B(z^0,r)\subset\mathbb{C}^n$ shar uchun

$$\omega_m^*(z^0,K\cap\overline{B},D,\psi)=\psi(z^0)$$

tenglik bajarilsa, z^0 nuqtaga K kompaktning *lokal* (m,ψ)-*regulyar* nuqtasi deyiladi. Agar K kompaktning barcha nuqtalari (m,ψ)-regulyar (yoki lokal (m,ψ)-regulyar) bo'lsa, u holda K ni (m,ψ)-*regulyar* (yoki *lokal* (m,ψ)-*regulyar*) kompakt deyiladi.

Quyida regulyarlikka doir bir nechta muhim teoremalarni isbotlaymiz.

Teorema 2.2.3. *Agar $\psi\in C(K)$ va K kompakt (m,ψ)-regulyar bo'lsa, u holda $\omega_m(z,K,D,\psi)$ funksiya D sohada uzluksiz bo'ladi.*

Ma'lumki, vaznsiz holda ($\psi\equiv-1$) regulyarlik va lokal regulyarlik ekvivalent emas. Biroq, vaznli holatda quyidagi teoremaga egamiz.

Teorema 2.2.4. *Aytaylik, $\psi\in C(K)$ bo'lsin. U holda quyidagi mulohazalar o'rinli:*

1. Fiksirlangan $z^0\in K$ nuqta lokal (m,ψ)-regulyar bo'lishi uchun uning lokal m-regulyar bo'lishi zarur va yetarli, ya'ni $\omega_m^*(z^0,K\cap\overline{B},D)=-1$.

2. Agar ψ funksiya $\overline{D}$ yopiq sohaning biror atrofi D^+ da manfiy va qatiy m-subgarmonik funksiya sifatida davom etsa, u holda $z^0\in K$ nuqta lokal (m,ψ)-regulyar bo'lishi uchun uning (m,ψ)-regulyar bo'lishi zarur va yetarli.

Quyida ushbu dissertatsiyaning asosiy natijalaridan birini keltiramiz. Aytaylik, $D\subset\mathbb{C}^n$ kuchli m-regulyar soha bo'lsin, ya'ni shunday $\rho\in sh_m(D^+)\cap C^2(D^+)$ funksiya mavjudki

$$D=\{z\in D^+:\rho(z)<0\},$$

bu yerda D^+ — $\overline{D}$ yopiq sohaning biror atrofi. $K\subset D$ kompakt va $\psi:K\to\mathbb{R}$ esa K da Gyolder uzluksiz funksiya bo'lsin.

Teorema 2.3.1. *Faraz qilaylik, shunday $C>0$ va $0<\alpha\le 1$ sonlar mavjud bo'lib, har bir $z\in D$ nuqta uchun quyidagi tengsizlik bajarilsin:*

$$|\omega_m^*(z,K,D,\psi)-\psi(w)|\le C\cdot\left(\operatorname{dist}(z,K)\right)^{\alpha},$$

bu yerda $w \in K$ — z *nuqtaga eng yaqin nuqta, ya'ni* $|z-w| = \mathrm{dist}(z,K)$. *U holda* $\omega_m^*(z,K,D,\psi)$ *funksiya* D *sohada Gyolder uzluksiz bo'ladi.*

Teorema 2.3.1 shuni bildiradiki, $\omega_m^*(z,K,D,\psi)$ funksiyaning K kompakt to'plamga nisbatan Gyolder uzluksizligi uning butun D sohada ham Gyolder uzluksizligini ta'minlaydi. Shuni ta'kidlash kerakki, ψ funksiyaning Gyolder uzluksizligi muhim shart bo'lib, aks holda, $\omega_m^*(z,K,D,\psi)$ funksiyaning Gyolder uzluksizligini kafolatlab bo'lmaydi.

Teorema 2.3.1 dan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija 2.3.3. *Faraz qilaylik, shunday* $C > 0$ *va* $0 < \alpha \le 1$ *sonlar mavjud bo'lib, har bir* $z \in D$ *nuqta uchun quyidagi tengsizlik bajarilsin:*

$$1 + \omega_m(z,K,D) \le C \cdot \left(\mathrm{dist}(z,K)\right)^{\alpha},$$

bu yerda $w \in K$ — z *nuqtaga eng yaqin nuqta, ya'ni* $|z-w| = \mathrm{dist}(z,K)$. *U holda* $\omega_m(z,K,D)$ *funksiya* D *sohada Gyolder uzluksiz bo'ladi.*

Uchinchi bobda vaznli (m,ψ)-subgarmonik o'lchovning maksimal ekanligi isbotlanadi. Shuningdek, vaznli (m,ψ)-subgarmonik o'lchov yordamida vaznli $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-sig'im $\mathcal{P}_m(E,D,\psi)$ tushunchasi kiritiladi va uning xossalari o'rganiladi. Bundan tashqari, vaznli (m,ψ)-sig'im tushunchasi kiritilib, uni vaznli (m,ψ)-subgarmonik o'lchov bilan bog'lab o'rganamiz hamda vaznli $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-sig'im va vaznli (m,ψ)-sig'im orasidagi bog'lanishni ifodalovchi muhim tengsizlikni isbotlaymiz.

Aytaylik, $D \subset \mathbb{C}^n$ chegaralangan soha va $E \subset D$ undagi biror to'plam bo'lib, E to'plamda manfiy va chegaralangan $\psi(z)$ funksiya berilgan bo'lsin. $\omega^*(z,E,D,\psi)$ funksiyani yuqoridagi kabi aniqlaylik.

Ta'rif 3.1.1. Ushbu

$$\mathcal{P}_m(E,D,\psi) = -\int_D \omega_m^*(z,E,D,\psi)\,dV$$

miqdorga E to'plamning D sohaga nisbatan *vaznli* $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$*-sig'imi* deb ataladi, bu yerda dV — $\mathbb{C}^n$ fazodagi Lebeg hajm o'lchovidir.

Vaznli $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-sig'im ko'p xossalarga ega bo'lib, biz ulardan eng muhimlarini teorema sifatida keltiramiz.

Teorema 3.1.3. *Quyidagi mulohazalar o'rinli:*

1. $\{K_j\}$ — *kamayuvchi kompakt to'plamlar ketma-ketligi bo'lib,* $K = \bigcap K_j$ *va* $\psi(z)$ *funksiya* K *kompaktning biror atrofida quyidan yarim uzluksiz bo'lsa, u holda*

$$\mathcal{P}_m(K,D,\psi) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{P}_m(K_j,D,\psi);$$

2. $\{E_j\}$ — *o'suvchi to'plamlar ketma-ketligi bo'lib,* $E = \bigcup E_j$ *bo'lsa, u holda*

$$\mathcal{P}_m(E,D,\psi) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{P}_m(E_j,D,\psi);$$

3. $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$*-sig'im sanoqli subaditiv, ya'ni agar ixtiyoriy* $j \in \mathbb{N}$ *uchun* $E_j \subset D$

bo'lsa, u holda

$$\mathcal{P}_m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j,D,\psi\right)\le\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{P}_m(E_j,D,\psi).$$

Maksimal funksiyalar potensiallar nazariyasining muhim tushunchalaridan biri bo'lib, m-subgarmonik funksiyalar sinfida ham muhim o'rin tutadi.

Ta'rif 3.2.1. $D\subset\mathbb{C}^n$ chegaralangan soha berilgan bo'lsin. $u\in sh_m(D)$ funksiya D sohada dominantlik prinsipini qanoatlantirsa, ya'ni

$$\forall v\in sh_m(D):\quad \varliminf_{z\to\partial D}\left(u(z)-v(z)\right)\ge 0$$

ekanligidan D sohaning ixtiyoriy nuqtasida $u(z)\ge v(z)$ tengsizlik o'rinli ekanligi kelib chiqsa, u holda u funksiya D sohada *maksimal* deyiladi.

Endi vaznli (m,ψ) -subgarmonik o'lchovning $D\setminus K$ sohada maksimal ekanligi haqidagi teoremani keltiramiz.

Teorema 3.2.2. *Aytaylik, $D\subset\mathbb{C}^n$ chegaralangan m-regular soha bo'lsin. Agar $K\subset D$ kompakt (m,ψ) -regulyar va $\psi\in C(K)$ bo'lsa, u holda vaznli $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-o'lchov $D\setminus K$ da maksimal bo'ladi, ya'ni*

$$(dd^c\omega_m^*(z,K,D,\psi))^{n-m+1}\wedge\beta^{m-1}=0.$$

Endi chegaralangan va m-regulyar $D\subset\mathbb{C}^n$ sohada, $K\subset D$ kompaktning vaznli (m,ψ)-sig'imi tushunchasini vazn funksiyasi $\psi(z)$ manfiy va uzluksiz bo'lgan holda kiritamiz.

Ta'rif 3.3.2. Ushbu

$$C_m(K,D,\psi)=\inf\left\{\int_D(dd^cu)^{n-m+1}\wedge\beta^{m-1}:u\in sh_m(D)\cap C(D),u|_K\le\psi|_K,\varliminf_{z\to\partial D}u(z)\ge 0\right\}$$

miqdorga K to'plamning D sohaga nisbatan *vaznli* (m,ψ)*-sig'imi* deb ataladi.

Vaznli (m,ψ) -sig'im ham ko'p xossalarga ega bo'lib, biz ularning eng muhimlarini keltiramiz.

Teorema 3.3.4. *Quyidagi munosabatlar o'rinli:*

1. Agar $K\subset D$ kompakt (m,ψ)-regulyar bo'lsa, u holda

$$C_m(K,D,\psi)=\int_K(dd^c\omega_m^*(z,K,D,\psi))^{n-m+1}\wedge\beta^{m-1}.$$

2. Har qanday kompakt $K\subset D$ uchun quyidagi tenglik o'rinli

$$C_m(K,D,\psi)=\inf\{C_m(E,D,\tilde\psi):E\supset K\},$$

bu yerda $\tilde\psi\in C(E)$, $\tilde\psi|_K=\psi|_K$ va E — D sohadagi $(m,\tilde\psi)$-regulyar kompakt.

3. Agar K kompakt (m,ψ)-regulyar bo'lsa, u holda

$$C_m(K,D,\psi)=\sup\{\int_K(dd^cu)^{n-m+1}\wedge\beta^{m-1}:u\in sh_m(D)\cap C(D),\psi|_K\le u|_K,u|_D<0\}.$$

Endi ochiq to'plamning (m,ψ) -sig'imi va ixtiyoriy $E\subset D$ to'plamning (m,ψ)-tashqi sig'imi tushunchasini kiritishga tayyormiz.

Ta'rif 3.3.5. Aytaylik, $U\subset D$ ochiq to'plam bo'lsin. Ushbu

$$C_m(U,D,\psi)=\sup\{C_m(K,D,\psi):K\subset U,\quad K-\text{kompakt}\}$$

miqdor U *ochiq to'plamning* (m,ψ)*-sig'imi* deyiladi.

Ixtiyoriy $E\subset D$ to'plam uchun (m,ψ)-tashqi sig'imni odatdagidek, quyidagi tarzda aniqlaymiz:

$$C_m^*(E,D,\psi)=\inf\{C_m(U,D,\psi):U\supset E,U\subset D\},$$

bu yerda U ochiq to'plam.

$\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-sig'im va (m,ψ)-tashqi sig'im orasidagi bog'lanishni ifodalovchi quyidagi teoremaga egamiz.

Teorema 3.4.2. *Aytaylik,* $B=B(0,1)$ *markazi koordinata boshida joylashgan birlik shar bo'lsin. Agar* $E\subset B(0,r)\subset\subset B(0,1)$ *bo'lsa, u holda quyidagi tengsizliklar o'rinli:*

$$C_1\cdot C_m^*(E,B,\psi)\le \mathcal{P}_m(E,B,\psi)\le C_2\cdot (C_m^*(E,B,\psi))^{n-m+1},$$

bu yerda $C_1>0$ *va* $C_2>0$ *o'zgarmaslar faqat* r *hamda* ψ *ga bog'liq.*

Yuqoridagi teoremadan quyidagi natijani olamiz.

Natija 3.4.3. (m,ψ) *- tashqi sig'im nolga teng bo'lishi uchun* $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$ *-sig'imning nolga teng bo'lishi zarur va yetarli. Bundan tashqari,* (m,ψ)*- tashqi sig'im* m*-polyar to'plamlardagina nolga teng bo'ladi va aksincha.*

XULOSA

Ushbu PhD dissertatsiya m-subgarmonik o'lchovlarning vaznli holatini o'rganishga bag'ishlangan. Biz vaznli (m,ψ)-subgarmonik o'lchov tushunchasini kiritdik va uning potensial xossalarini o'rgandik. Bundan tashqari, $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-sig'im va (m,ψ)-sig'im tushunchalariga ta'rif berilib, ularning muhim xossalari isbotlandi.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

— agar $K\subset D$ kompakt (m,ψ)-regulyar va $\psi\in C(K)$ bo'lsa, u holda vaznli (m,ψ)-subgarmonik o'lchov $\omega_m^*(z,K,D,\psi)$ uzluksizdir;

— agar $\psi\in C(K)$ bo'lsa, u holda lokal m-regulyarlik va lokal (m,ψ)-regulyarlik ekvivalentdir;

— agar $\psi\in C(K)$ va u qat'iy m-subgarmonik funksiya sifatida K ning biror atrofiga davom etsa, (m,ψ)-regulyarlik va lokal (m,ψ)-regulyarlik ekvivalentdir;

— agar $\omega^*(z,K,D,\psi)$ funksiya K kompaktga nisbatan Gyolder uzluksiz va ψ funksiya K kompakda Gyolder uzluksiz bo'lsa, u holda $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-o'lchov D sohada Gyolder uzluksiz bo'ladi;

— yuqoridagiga o'xshash tarzda, agar K kompaktning vaznli m-Green funksiyasi K kompaktga nisbatan Gyolder uzluksiz va ψ funksiya K kompakda Gyolder uzluksiz bo'lsa, u holda K kompaktning vaznli m-Green funksiyasi hamma yerda Gyolder uzluksiz bo'ladi;

— agar $K\subset D$ kompakt (m,ψ)-regulyar va $\psi\in C(K)$ bo'lsa, u holda $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-o'lchov $D\setminus K$ da maksimal bo'ladi, ya'ni

$$(dd^c\omega_m^*(z,K,D,\psi))^{n-m+1}\wedge\beta^{m-1}=0;$$

— agar $K\subset D$ kompakt (m,ψ)-regulyar bo‘lsa, u holda

$$C_m(K,D,\psi)=\int_K(dd^c\omega_m^*(z,K,D,\psi))^{n-m+1}\wedge\beta^{m-1};$$

— har qanday kompakt $K\subset D$ uchun quyidagi tenglik o‘rinli:

$$C_m(K,D,\psi,\delta)=\inf\{C_m(E,D,\tilde{\psi}):E\supset K\},$$

bu yerda $\tilde{\psi}\in C(E)$, $\tilde{\psi}|_K=\psi|_K$ va E kompakt $(m,\tilde{\psi})$-regulyar;

— agar $E\subset B(0,r)\subset\subset B(0,1)$ bo‘lsa, $B=B(0,1)$ —birlik shar, u holda

$$C_1\cdot C_m^*(E,B,\psi)\le\mathcal{P}_m(E,B,\psi)\le C_2\cdot(C_m^*(E,B,\psi))^{n-m+1},$$

bu yerda $C_1>0$ va $C_2>0$ o‘zgarmaslar faqat r hamda ψ ga bog‘liq.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА

КУЛДАШЕВ КОБИЛЖОН КУЛДАШЕВИЧ

ВЕСОВЫЕ m-СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ МЕРЫ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент — 2025 г

Тема диссертации на соискание ученой степени доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан под номером № B2025.3.PhD/FM1345.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации размещен на трех языках (узбекском, русском и английском — резюме) на веб-сайте ученого совета (http://ik-fizmat.nuu.uz) и в образовательной информационной сети «ZiyoNet» (http://www.ziyonet.uz/).

Научный руководитель:	**Рахимов Карим Хошимович** доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Официальные оппоненты:	**Рахимов Абдугафур Абдумажидович** доктор физико-математических наук, профессор
	Шарипов Расулбек Ахмедович Кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Туринский политехнический университет в городе Ташкенте**

Защита диссертации состоится на заседании Научного совета № DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека в 2026 году «8» января в 11⁰⁰ часов. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: +998-71-227-12-24, факс: +998-71-246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (зарегистрирована под № 251). Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: +998-71-246-02-24.

Автореферат диссертации распространен «29» декабря 2025 года.
(протокол реестра № 2 от «29» декабря 2025 года)

OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI MIRZO ... NOMIDAGI O'ZBEKISTON

О. С. Зикиров
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Р. М. Жураев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.ф.-м.н. (PhD)

Р. Н. Ганиходжаев
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (автореферат диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В мировом научном сообществе теория плюрипотенциалов стремительно развивается как одно из наиболее важных и актуальных направлений математики. Действительно, в современной математике, в частности в области многомерных комплексных динамических систем, многие научные исследования часто сводятся к задачам теории плюрипотенциалов. Эта область имеет значение не только для чистой математики, но и для многих прикладных наук, таких как электростатика, квантовая механика, гидродинамика и другие. Операторы Лапласа и Монже–Ампера, которые являются объектами исследования теорий потенциалов и плюрипотенциалов, а также субгармонические и плурисубгармонические функции, анализируемые посредством указанных операторов, равно как связанные с ними понятия меры и ёмкости, всесторонне изучаются и представляют собой одни из актуальных проблем современной математики.

В последние годы обобщённые формы операторов Лапласа и Монжа–Ампера, а именно комплексный оператор Гессиан, а также определяемые с его помощью m-субгармонические функции и понятия $\mathcal{P}_m$-меры и m-ёмкости, введённые в классе m-субгармонических функций, стали основными и современными объектами теории плюрипотенциалов. В теории m-субгармонических функций изучение весовой m-субгармонических мер и свойств соответствующих ёмкостей, а также свойств регулярности связанных с ними компактных множеств — в частности, Гёльдеровой регулярности и поведения на границе — считается одной из важных задач математической физики, теории функций нескольких комплексных переменных и комплексных динамических систем. Действительно, если применить весовую m-субгармоническую меру относительно области $D \supset K$ к комплексному оператору Гессиан компактного множества $K \subset \mathbb{C}^n$, мы получим меру, носитель которой расположен на этом компакте. Такие меры играют существенную роль в комплексных динамических системах.

В нашей стране, особенно в последние годы, уделяется особое внимание развитию фундаментальных наук, в частности теории комплексного анализа и потенциалов. Исследования, посвящённые теории m-субгармонических функций, начатые школой академика А. Садуллаева, в настоящее время получили международное признание. Расширение масштабов научных исследований по приоритетным направлениям дисциплин «Теория функций вещественной переменной и Теория функций комплексной переменной» на уровне международных стандартов, повышение их результативности и практической значимости определены как важные задачи и основные направления деятельности математической науки [1]. С этой точки зрения

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

изучение основных свойств весовых m-субгармонических мер и ёмкостей, а также выявление новых областей их применения представляет собой значимую теоретическую и практическую задачу.

Проведённые в данной диссертационной работе исследования в определённой степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан № PF-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», Постановлении № PQ-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управлению и финансированию научно-исследовательских работ», а также Постановлении № PQ-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» и других нормативно-правовых документах, относящихся к данной сфере деятельности.

Связь исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий Республики. Работа выполнена в соответствии с приоритетным направлением IV науки и технологий Республики Узбекистан: «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Так же, как субгармонические функции являются основными объектами теории потенциалов, одним из главных объектов теории плюрипотенциалов являются плюрисубгармонические функции. В нашей стране также уделяется большое внимание развитию фундаментальных наук, в частности комплексного анализа и теории потенциалов. Исследования по теории m-субгармонических функций, начатые школой академика А. Садуллаева, в настоящее время получили международное признание. С этой точки зрения изучение основных свойств весовых m-субгармонических мер и ёмкостей, а также определение новых областей их применения имеет большое теоретическое и практическое значение.

Плюрисубгармоническая мера ($\mathcal{P}$ -мера), введённая в этом классе, обладает рядом важных свойств, аналогичных свойствам комплексной функции Грина и широко используется при решении краевых задач. Кроме того, $\mathcal{P}$ -мера применяется при изучении регулярности и локальной регулярности компактных множеств и была эффективно использована при исследовании ёмкостей, введённых в классе плюрисубгармонических функций на регулярных компактах. Эти результаты исследований можно найти в работах Бедфорда–Тейлора, Садуллаева и других известных учёных.

В начале XXI века на основе теории плюрипотенциалов сформировалось новое направление — теория потенциалов в классе m-субгармонических функций $\left(sh_m\right)$. Этот класс занимает промежуточное положение между субгармоническими и плюрисубгармоническими функциями и представляет их естественное обобщение. Действительно, при $m=1$ мы получаем класс субгармонических функций, а при $m=n$ — класс плюрисубгармонических функций.

Понятие m-субгармонических функций впервые было введено в науку З. Блоцки, который доказал основные свойства этого класса. Позднее А. Садуллаев и Б. Абдуллаев провели углублённое исследование теории потенциалов в классе m-субгармонических функций. Кроме того, было введено понятие m-субгармонической меры, изучены её основные свойства и с помощью m-субгармонической меры в классе m-субгармонических функций были определены различные типы ёмкостей, а также установлены ряд их свойств. Данный класс широко применяется в многомерном вещественном анализе и дифференциальной геометрии. В частности, с помощью m-субгармонических функций и m-субгармонических мер изучался класс m-выпуклых функций нескольких вещественных переменных и в этом классе была решена задача Дирихле.

Работы З. Блоцкого, С. Колодзея, С. Динева, Х. Ч. Лу, А. Садуллаева и Б. Абдуллаева внесли значительный вклад в развитие теории m-субгармонических функций. В настоящее время активные исследования класса m-субгармонических функций ведутся учёными из Франции, Польши, Китая, Узбекистана и многими другими известными учёными по всему миру.

В классе плюрисубгармонических функций весовая комплексная функция Грина изучалась такими выдающимися учёными, как Й. Сичак, В. Захарьюта и А. Садуллаев, которые получили важные результаты. Однако весовая $\mathcal{P}$-мера в классе плюрисубгармонических функций ещё не была исследована. Даже задача о Гёльдеровой непрерывности в невесовом случае до сих пор не изучалась не только для $\mathcal{P}$-меры, но и для гармонической меры, введённой в классе субгармонических функций.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами вуза, где выполняется диссертация. Исследования проводились по плановой теме научно-исследовательского гранта № IL-5421101746 Министерства высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан в Мирзо Улугбекском Национальном университете Узбекистана.

Целью данного исследования является изучение свойств весовой (m,ψ)-субгармонической меры и с их помощью исследование весовых ёмкостей.

Задачи исследования:

ввести понятие весовой (m,ψ)-субгармонической меры и изучить её свойства;

исследовать локальную и глобальную (m,ψ)-регулярность компактных множеств с помощью весовой (m,ψ)-субгармонической меры;

изучить Гёльдерову непрерывность m-субгармонической меры как в весовом, так и в невесовом случаях;

ввести понятие весовой $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-ёмкости, сравнить её с классической $\mathcal{P}_m$-ёмкостью и определить её основные свойства;

ввести понятие весовой (m,ψ)-ёмкости и исследовать её основные характеристики;

проанализировать взаимосвязь между $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-ёмкостью и (m,ψ)-внешней ёмкостью.

Объект исследования. Объектом исследования являются m-субгармонические функции, весовые (m,ψ)-субгармонические меры, весовые m-функции Грина и весовые ёмкости в теории потенциалов.

Предмет исследования. Предметом исследования является изучение весовых (m,ψ)-субгармонических мер, (m,ψ)-ёмкостей и весовых m-функций Грина, с акцентом на их основные свойства, связь с классическими понятиями теории потенциалов, а также вопросы регулярности и Гёльдеровой непрерывности.

Методы исследования. В работе используются методы функционального анализа, современные методы комплексного анализа, обобщённые функции, общая топология, классическая теория потенциалов и методы теории плюрипотенциалов.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

введено понятие весовой (m,ψ)-субгармонической меры и доказаны её потенциальные свойства;

с помощью весовой (m,ψ)-субгармонической меры установлены несколько важных теорем, касающихся свойств (m,ψ)-регулярности компактных множеств;

доказано, что если весовая m-функция Грина и весовая m-субгармоническая мера являются Гёльдерово непрерывными относительно компактного множества и весовая функция Гёльдерово непрерывна на этом компакте, то они также являются Гёльдерово непрерывными во всей области;

введены понятия $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-ёмкости и (m,ψ)-ёмкости, и установлены ряд их важных свойств;

доказано неравенство, выражающее взаимосвязь между $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-ёмкостью и (m,ψ)-внешней ёмкостью.

Практические результаты. Весовая (m,ψ)-субгармоническая мера и её свойства используются при решении краевых задач и при изучении свойств регулярности множества Жюлиа для полиномиально подобных отображений в комплексных динамических системах. Кроме того, результаты и методы, представленные в данной диссертации, могут быть использованы в специальных курсах, предназначенных для магистрантов и докторантов высших учебных заведений.

Достоверность результатов. Результаты были получены с использованием методов функционального анализа, классической теории потенциалов и теории плюрипотенциалов. Полученные результаты имеют строго математические доказательства.

Научная и практическая значимость. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что были введены и изучены весовые (m,ψ)-субгармонические меры. С их помощью были определены понятия весовой

(m,ψ)-ёмкости и $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-ёмкости и проанализированы их свойства. Кроме того, была доказана теорема о Гёльдеровой непрерывности весовых m-функций Грина и весовых m-субгармонических мер. Полученные результаты расширяют классические понятия теории плюрипотенциалов и предоставляют новый подход к исследованию свойств регулярности компактных множеств.

Практическая значимость результатов исследования состоит в том, что они способствуют более глубокому пониманию свойств регулярности и понятия ёмкости компактных множеств, а также служат основой для решения различных задач в теории функций нескольких комплексных переменных и в комплексных динамических системах. Кроме того, данные результаты могут быть полезны при математическом моделировании технических, физических и биологических процессов.

Внедрение результатов исследования. Научные результаты, полученные в ходе исследования диссертации, внедрены в следующие научные проекты:

весовая (m,ψ) –субгармоническая мера множества E относительно области $D\subset\mathbb{C}^n$ и (m,ψ)–ёмкости были использованы в фундаментальном научном проекте FA-F-4-002 « m –субгармонические функции и их приложения в калиброванной геометрии» (Справка № 247/2-25 Регионального отделения Академии наук Республики Узбекистан – Хорезмской Мамун академии, от 7 октября 2025 года). Применение данных научных результатов позволило построить и развить теорию весовых m-потенциаловж;

полученные в данном исследовании научные результаты, посвящённые изучению потенциальных свойств весовых m-субгармонических функций и (m,ψ)-регулярности компактных множеств, были эффективно использованы в проекте, реализованном в Ургенчском государственном университете в 2020-2022 годах в рамках программы Европейского Союза 610170-EPP-1-2019-1-ES-EPPKA2-CBHE-JP «Establishment of training and research centers and courses development on intelligent big data analysis in Central Asia: ELBA» (Reference No. 06-201/4 Ургенчского государственного университета имени Абу Райхона Беруни, от 11 ноября 2025 года). Результаты исследования позволили проанализировать и оценить весовую m-ёмкость множества E. Кроме того, было показано, что весовая m-ёмкость множества E равна нулю тогда и только тогда, когда множество E является m-полярным. Кроме того, результаты и методы, представленные в диссертации, используются в специальных учебных курсах для магистрантов и докторантов высших учебных заведений.

Апробация результатов исследования. Основные результаты исследования были обсуждены на 5 международных и 7 республиканских научных конференциях.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 20 научных работ в научных журналах, 8 из которых включены в перечень журналов, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики

Узбекистан для защиты диссертаций на соискание степени PhD. Из них 3 работы опубликованы в международных и 5 — в национальных математических журналах. 3 из 20 научных работ включены в базу данных SCOPUS, а также опубликовано 12 тезисов.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Общий объём диссертации составляет 75 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована и проанализирована актуальность и необходимость темы диссертации. Показано соответствие исследования национальным приоритетам развития науки и технологий, а также обсуждена степень изученности рассматриваемой проблемы. Чётко определены цель, задачи, объект и предмет исследования. Описаны научная новизна и практическая значимость полученных результатов, подчёркивающие их теоретическую и прикладную ценность. Кроме того, приведена подробная информация о внедрении результатов исследования, опубликованных работах и структуре диссертации.

В первой главе даётся обзор основных и важных понятий, которые используются в последующих главах: дифференциальные формы, положительные потоки, субгармонические функции, плюрисубгармонические функции, m-субгармонические функции, m-полярные множества, m-субгармонические меры, $\mathcal{P}_m$-ёмкость и m-ёмкость. В этой главе также рассматриваются основные теоремы, ранее доказанные и используемые в следующих главах.

Изначально понятие m-субгармоничности вводится в классе C^2.

Определение 1.2.4. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — ограниченная область. Действительная функция $u \in C^2(D)$ называется *m-субгармонической*, если в каждой точке $z^0 \in D$ выполняются следующие условия:

$$(dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k} \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-m+1,$$

где $d = \partial + \bar{\partial}, \quad d^c = \dfrac{\partial - \bar{\partial}}{4i}, \quad \beta = dd^c |z|^2$.

Используя Определение 1.2.4, m-субгармонические функции определяются в классе локально интегрируемых функций.

Определение 1.2.5. Действительная функция $u \in L^1_{\text{loc}}(D)$ называется *m-субгармонической* в области $D \subset \mathbb{C}^n$, если она является сильно полунепрерывной сверху и для любых функций $v_1, v_2, \ldots, v_{n-m} \in C^2(D)$, которые являются m-субгармоническими, поток

$$dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge dd^c v_2 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1}$$

является положительным, т.е. для любой положительной тестовой функции $\omega \in F^{0,0}(D)$ выполняется неравенство

$$\int_D u \wedge dd^c v_1 \wedge dd^c v_2 \wedge \ldots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1} \wedge dd^c \omega \geq 0.$$

Функция u называется *строго* m*-субгармонической* в области $D,$ если для любой области $G \Subset D$ существует такое $\varepsilon > 0,$ что $u(z) - \varepsilon |z|^2$ является m -субгармонической в $G.$

Класс m-субгармонических функций в области D обозначается через $sh_m(D).$ В этот класс также включается тривиальная функция $u \equiv -\infty$.

m-субгармоническая мера определяется как экстремальная функция в классе m -субгармонических функций. Пусть $E \subset D$ — фиксированное множество области $D \subset \mathbb{C}^n$. Предположим, что D — ограниченная и m -регулярная область, т. е.

$$\exists \rho \in sh_m(D) : \rho|_D < 0, \lim_{\substack{z \to \partial D \\ z \in D}} \rho(z) = 0,$$

и определим

$$\omega_m(z, E, D) = \sup\{u(z) : u \in sh_m(D), \quad u|_E \leq -1, \quad u|_D < 0\}.$$

Определение 1.3.2. Регуляризация $\omega_m^*(z, E, D) = \overline{\lim_{w \to z}} \omega_m(w, E, D)$ называется m *-субгармонической мерой* ($\mathcal{P}_m$ *–мерой*) множества E относительно области $D.$

Пусть $K \subset D$ — фиксированное компактное множество.

Определение 1.3.3. Точка $z^0 \in K$ называется m *-регулярной*, если $\omega_m^*(z^0, K, D) = -1$. Она называется *локально* m*-регулярной*, если для любого шара $B = B(z^0, r) \subset \mathbb{C}^n$ пересечение $K \cap \overline{B}$ является m-регулярным в точке z^0 , т.е. $\omega_m^*(z^0, K \cap \overline{B}, D) = -1$. Если все точки компактного множества K являются m-регулярными (или локально m-регулярными), то компакт K называется m*-регулярным* (или *локально* m*-регулярным*) *компактом*.

Во второй главе введено понятие весовой (m,ψ)-субгармонической меры и изучены её потенциальные свойства. Также доказаны несколько теорем, связанных с регулярностью компактного множества относительно весовой функции. Кроме того, доказано, что если весовая m -субгармоническая мера компакта K является Гёльдерово непрерывной относительно K и весовая функция также удовлетворяет условию Гёльдеровой непрерывности на K, то она является Гёльдерово непрерывной в области D . Аналогично показано, что если указанные условия выполняются для весовой m-функции Грина компакта $K,$ то она также является Гёльдерово непрерывной всюду.

Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — m -регулярная область, $E \subset D$ — фиксированное множество, а $\psi(z)$ — ограниченная и отрицательная функция в E . Определим следующую функцию:

$$\omega_m(z, E, D, \psi) = \sup\left\{u(z) : u \in sh_m(D), \quad u|_E \leq \psi|_E, \quad u|_D < 0\right\}.$$

Определение 2.1.1. Регуляризация $\omega_m^*(z,E,D,\psi) = \overline{\lim_{w \to z}} \omega_m(w,E,D,\psi)$

называется (m,ψ) *-субгармонической мерой* ($\mathcal{P}_{(m,\psi)}$ *–мерой*) множества E относительно области D.

Заметим, что $\omega_m^*(z,E,D,-1)$ (т.е. при $\psi \equiv -1$) совпадает с m -субгармонической мерой теории потенциалов в классе функций $u \in sh_m(D)$, т.е.

$$\omega_m^*(z,E,D,-1) = \omega_m^*(z,E,D).$$

Предложение 2.1.4. *Неравенство*

$$-\inf_{w\in E}\psi(w)\cdot \omega_m^*(z,E,D) \le \omega_m^*(z,E,D,\psi) \le -\sup_{w\in E}\psi(w)\cdot \omega_m^*(z,E,D)$$

выполняется для любого множества $E \subset D$ *и всех* $z \in D$.

Из Предложения 2.1.4 следует, что весовая m-субгармоническая мера $\omega_m^*(z,E,D,\psi)$ либо нигде не обращается в нуль, либо тождественно равна нулю. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда E является m -полярным множеством, т.е. существует функция $u \in sh_m(D)$ такая, что

$$u \not\equiv -\infty, \quad u|_E = -\infty.$$

Теорема 2.1.7. *Имеют место следующие утверждения:*

а). Пусть $E \subset\subset D_1$ *и* $D_j \subset D_{j+1}$ *при* $\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j = D$*, где* $j \in \mathbb{N}$*. Тогда*

$$\lim_{j\to\infty}\omega_m^*(z,E,D_j,\psi) = \omega_m^*(z,E,D,\psi).$$

б). Пусть $E \subset D$ *— произвольное множество. Если функция* $\psi(z)$ *является полунепрерывной снизу в* $V \subset D$*, где* V *— некоторая окрестность множества* E*, то существует последовательность открытых множеств* $U_j \supset E$*,* $U_j \supset U_{j+1}$*, такая что*

$$\left(\lim_{j\to\infty}\omega_m^*(z,U_j,D,\psi)\right)^* = \omega_m^*(z,E,D,\psi).$$

с). Пусть $U \subset D$ *— открытое множество. Если* $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ *, где* $K_j \subset K_{j+1}$ *— компактные множества, а* $\psi(z)$ *является полунепрерывной сверху функцией в* U*, то*

$$\omega_m^*(z,K_j,D,\psi) \downarrow \omega_m^*(z,U,D,\psi).$$

Пусть $K \subset D$ — фиксированное компактное множество.

Определение 2.2.2. Точка $z^0 \in K$ называется (m,ψ) *-регулярной*, если $\omega_m^*(z^0,K,D,\psi) = \psi(z^0)$. Она называется *локально* (m,ψ)*-регулярной*, если для любого шара $B = B(z^0,r) \subset \mathbb{C}^n$ пересечение $K \cap \overline{B}$ является (m,ψ) -регулярным в точке z^0, т.е. $\omega_m^*(z^0,K \cap \overline{B},D,\psi) = \psi(z^0)$. Если все точки компактного множества K являются (m,ψ)-регулярными (соответственно, локально (m,ψ) -регулярными), то компакт K называется (m,ψ) *-регулярным* (соответственно, *локально* (m,ψ)*-регулярным*) компактом.

В дальнейшем, предполагая, что функция ψ непрерывна на K, мы приводим несколько важных теорем, связанных с регулярностью.

Теорема 2.2.3. *Пусть* $\psi \in C(K)$. *Если* K *является* (m,ψ)*-регулярным компактом, то функция* $\omega_m(z,K,D,\psi)$ *непрерывна в области* D.

Известно, что в невесовом случае ($\psi \equiv -1$) регулярность и локальная регулярность не эквивалентны. Однако в весовом случае имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2.4. *Пусть* $\psi \in C(K)$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. Фиксированная точка $z^0 \in K \subset \mathbb{C}^n$ *является локально* (m,ψ)*-регулярной тогда и только тогда, когда она локально* m*-регулярна, т.е.*

$$\omega_m^*(z^0, K \bigcap \overline{B}, D) = -1.$$

2. Если функция ψ *может быть продолжена до отрицательной и строго* m*-субгармонической функции в области* D^+, *где* D^+ *— некоторая окрестность замыкания* $\overline{D}$, *то точка* $z^0 \in K$ *является локально* (m,ψ)*-регулярной тогда и только тогда, когда она* (m,ψ)*-регулярна.*

Ниже приведён один из основных результатов данной диссертации. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — сильно m-регулярная область, т.е. существует окрестность D^+ замыкания $\bar{D}$ и функция $\rho \in sh_m(D^+) \bigcap C^2(D^+)$ такая, что $D = \{z \in D^+ : \rho(z) < 0\}$, $K \subset D$ — фиксированный компакт, а $\psi : K \to \mathbb{R}$ — функция, обладающая свойством Гёльдеровой непрерывности.

Теорема 2.3.1. *Предположим, что существуют константы* $C > 0$ *и* $0 < \alpha \le 1$ *такие, что для любого* $z \in D$ *выполняется*

$$|\,\omega_m^*(z,K,D,\psi) - \psi(w)| \le C \cdot \left(\operatorname{dist}(z,K)\right)^\alpha,$$

где $w \in K$ *— точка, ближайшая к* z, *т.е.* $|z-w| = \operatorname{dist}(z,K)$. *Тогда функция* $\omega_m^*(z,K,D,\psi)$ *является Гёльдерово непрерывной в области* D.

Теорема 2.3.1 утверждает, что Гёльдерова непрерывность функции $\omega_m^*(z,K,D,\psi)$ относительно компакта K влечёт её Гёльдерову непрерывность во всей области D. Важно отметить, что свойство Гёльдеровой непрерывности функции ψ является существенным; без этого предположения, вообще говоря, нельзя гарантировать Гёльдерову непрерывность функции $\omega_m^*(z,K,D,\psi)$.

Из теоремы 2.3.1 вытекает следующее следствие.

Следствие 2.3.3. *Предположим, что существуют константы* $C > 0$ *и* $0 < \alpha \le 1$ *такие, что для любого* $z \in D$ *выполняется*

$$1 + \omega_m(z,K,D) \le C\,|z-w|^\alpha,$$

где $w \in K$ *— точка, ближайшая к* z, *т.е.* $|z-w| = \operatorname{dist}(z,K)$. *Тогда функция* $\omega_m(z,K,D)$ *является Гёльдерово непрерывной в области* D.

В третьей главе доказывается максимальность весовой (m,ψ)-субгармонической меры. Также вводится понятие весовой ёмкости $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$, основанное на весовой (m,ψ)-субгармонической мере и изучаются её свойства. Кроме того, определяется весовая (m,ψ)-ёмкость, исследуется её связь с весовой (m,ψ)-субгармонической мерой и доказывается неравенство, описывающее взаимосвязь между весовой ёмкостью $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$ и весовой (m,ψ) -ёмкостью.

Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — ограниченная область, $E \subset D$ — произвольное множество, а $\psi(z)$ — ограниченная отрицательная функция на E. Тогда, как и выше, строится функция $\omega^*(z,E,D,\psi)$.

Определение 3.1.1. Величина

$$\mathcal{P}_m(E,D,\psi) = -\int_D \omega_m^*(z,E,D,\psi)dV$$

называется $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-*ёмкостью* множества E относительно области D, где dV обозначает стандартную меру Лебега в $\mathbb{C}^n$.

Следующая теорема выражает основные свойства $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-ёмкости.

Теорема 3.1.3. *Имеют место следующие свойства:*

1. Пусть $\{K_j\}$ — убывающая последовательность компактов в D, $K = \bigcap K_j$, и предположим, что $\psi(z)$ является полунепрерывной снизу в некоторой окрестности $V \supset K$ множества K, где $V \subset D$. Тогда

$$\mathcal{P}_m(K,D,\psi) = \lim_{z\to\infty} \mathcal{P}_m(K_j,D,\psi);$$

2. Пусть $\{E_j\}$ — возрастающая последовательность произвольных подмножеств области D и $E = \bigcup E_j$. Тогда

$$\mathcal{P}_m(E,D,\psi) = \lim_{j\to\infty} \mathcal{P}_m(E_j,D,\psi);$$

3. Ёмкость $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$ счётно субаддитивна, то есть если $E_j \subset D$ для каждого $j \in \mathbb{N}$, то

$$\mathcal{P}_m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, D, \psi\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{P}_m(E_j,D,\psi).$$

Maximal functions are one of the important concepts of the potential theory and they are analog of harmonic functions in the class of m-subharmonic functions.

Определение 3.2.1. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$. Функция $u \in sh_m(D)$ называется *максимальной* в области D, если она удовлетворяет принципу доминирования в классе m-субгармонических функций, т.е. если

$$\forall v \in sh_m(D): \quad \underline{\lim}_{z\to\partial D} \left(u(z) - v(z)\right) \ge 0,$$

то для всех $z \in D$ выполняется неравенство $u(z) \ge v(z)$.

Докажем, что (m,ψ)-субгармоническая мера является максимальной в области $D \setminus K$.

Теорема 3.2.2. *Пусть $K \subset D$ — (m,ψ)-регулярный компакт и $\psi \in C(K)$. Тогда $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-мера является максимальной в открытом множестве*

$D\setminus K$, *то есть*

$$(dd^c \omega_m^*(z,K,D,\psi))^{n-m+1} \wedge \beta^{m-1} = 0.$$

Пусть $D\subset \mathbb{C}^n$ *—* m *-регулярная область,* $K\subset D$ *— фиксированный компакт, а* $\psi(z)$ *— непрерывная отрицательная функция на* K.

Определение 3.3.2. Следующая величина

$$C_m(K,D,\psi) = \inf\left\{\int_D (dd^c u)^{n-m+1} \wedge \beta^{m-1} : u \in sh_m(D)\bigcap C(D),\ u|_K \le \psi|_K,\ \varliminf_{z\to\partial D} u(z) \ge 0\right\}$$

называется (m,ψ)*-ёмкостью* компакта K относительно области D.

(m,ψ)-ёмкость обладает следующими свойствами.

Теорема 3.3.4. *Имеют место следующие соотношения:*

1. Если $K\subset D$ *—* (m,ψ)*-регулярный компакт, то*

$$C_m(K,D,\psi) = \int_K (dd^c \omega_m^*(z,K,D,\psi))^{n-m+1} \wedge \beta^{m-1}.$$

2. Для любого компакта $K\subset D$ *имеет место равенство*

$$C_m(K,D,\psi,\delta) = \inf\left\{C_m(E,D,\tilde\psi) : E \supset K\right\},$$

где $\tilde\psi \in C(E)$, $\tilde\psi|_K = \psi|_K$, *а* E *—* $(m,\tilde\psi)$*-регулярный компакт в области* D.

3. Если K *является* (m,ψ) *-регулярным компактом, то справедливо равенство*

$$C_m(K,D,\psi) = \sup\left\{\int_K (dd^c u)^{n-m+1} \wedge \beta^{m-1} : u \in sh_m(D)\bigcap C(D), \psi|_K \le u|_K, u|_D < 0\right\}.$$

Теперь введём понятие (m,ψ)-ёмкости открытого множества и (m,ψ) -внешней ёмкости произвольного множества $E\subset D$.

Определение 3.3.5. Пусть U — открытое подмножество области D. Величина

$$C_m(U,D,\psi) = \sup\{C_m(K,D,\psi) : K\subset U\}$$

называется (m,ψ)*-ёмкостью* открытого множества U.

Из определения (m,ψ)-ёмкости открытого множества U и из Теоремы 3.3.4 следует, что

$$C_m(U,D,\psi) = \sup\{C_m(K,D,\psi) : K\subset U\},$$

где K — (m,ψ)-регулярный компакт.

(m,ψ) *-внешняя ёмкость*, обозначаемая через $C_m^*(E,D,\psi)$ для любого множества $E\subset D$, определяется стандартным образом:

$$C_m^*(E,D,\psi) = \inf\{C_m(U,D,\psi) : U \supset E, U\subset D\}.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.4.2. *Пусть* $B = B(0,1)$ *— единичный шар с центром в начале координат. Предположим, что* $E\subset B(0,r) \subset\subset B(0,1)$. *Тогда выполняются следующие неравенства:*

$$C_1 \cdot C_m^*(E,B,\psi) \le \mathcal{P}_m(E,B,\psi) \le C_2 \cdot (C_m^*(E,B,\psi))^{n-m+1},$$

где C_1 *и* C_2 *— положительные константы, зависящие от* r *и* ψ.

Из Теоремы 3.4.2 вытекает следующее следствие.

Следствие 3.4.3. (m,ψ)*-ёмкость равна нулю тогда и только тогда, когда* $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$*-ёмкость равна нулю. Более того,* (m,ψ)*-ёмкость обращается в нуль на* m*-полярных множествах и наоборот.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию весовых m -субгармонических мер. В работе введено понятие весовой (m,ψ) -субгармонической меры и изучены её потенциальные свойства. Кроме того, определены понятия $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-ёмкости и (m,ψ)-ёмкости, а также доказаны их важные свойства.

Основные результаты исследования заключаются в следующем:

— если $K \subset D$ — (m,ψ)-регулярный компакт и $\psi \in C(K)$, то весовая (m,ψ)-субгармоническая мера $\omega_m^*(z,K,D,\psi)$ является непрерывно

— если $\psi \in C(K)$, то локальная m-регулярность и локальная (m,ψ) -регулярность эквивалентны;

— если $\psi \in C(K)$ и весовая функция ψ продолжается как строго m -субгармоническая функция в некоторой окрестности компакта K, то (m,ψ) -регулярность и локальная (m,ψ)-регулярность эквивалентны;

— если весовая m -субгармоническая мера компакта K является Гёльдерово непрерывной относительно K и весовая функция также удовлетворяет условию Гёльдеровой непрерывности на K, то она является Гёльдерово непрерывной в области D;

— аналогично, если весовая m-функция Грина компакта K является Гёльдерово непрерывной относительно K и весовая функция также удовлетворяет условию Гёльдеровой непрерывности на K, то она является Гёльдерово непрерывной всюду;

— если $K \subset D$ — (m,ψ)-регулярный компакт и $\psi \in C(K)$, то $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$ -мера является максимальной в открытом множестве $D \setminus K$, т.е.

$$(dd^c \omega_m^*(z,K,D,\psi))^{n-m+1} \wedge \beta^{m-1} = 0;$$

— если $K \subset D$ — (m,ψ) -регулярный компакт, то выполняется равенство

$$C_m(K,D,\psi) = \int_K (dd^c \omega_m^*(z,K,D,\psi))^{n-m+1} \wedge \beta^{m-1};$$

— для любого компакта $K \subset D$ имеем

$$C_m(K,D,\psi,\delta) = \inf\left\{C_m(E,D,\tilde{\psi}) : E \supset K\right\},$$

где $\tilde{\psi} \in C(E)$, $\tilde{\psi}\,|_K = \psi\,|_K$, а E — $(m,\tilde{\psi})$-регулярный компакт в области D;

— если $E \subset B(0,r) \subset\subset B(0,1)$, где $B = B(0,1)$ — единичный шар с центром в начале координат, то выполняются следующие неравенства:

$$C_1 \cdot C_m^*(E,B,\psi) \le \mathcal{P}_m(E,B,\psi) \le C_2 \cdot (C_m^*(E,B,\psi))^{n-m+1},$$

где C_1 и C_2 — положительные константы, зависящие от r и ψ.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER MIRZO ULUGBEK

KULDOSHEV KOBILJON KULDOSHEVICH

WEIGHTED m-SUBHARMONIC MEASURES

01.01.01 – Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2025

The topic of the dissertation for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) in Physical and Mathematical Sciences has been registered with the Higher Attestation Commission under the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under the number № B2025.3.PhD/FM1345.

The dissertation has been carried out at the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation, prepared in three languages (Uzbek, Russian, and English – summary), has been posted on the official webpage of the Scientific Council (http://ik-fizmat.nuu.uz) and on the "ZiyoNet" educational information network (http://www.ziyonet.uz/).

Scientific supervisor: **Karim Rakhimov Khoshimovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior Scientist

Official opponents: **Abdugafur Rakhimov Abdumadjidovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor.
Rasulbek Sharipov Axmedovich
PhD in Physical and Mathematical Sciences, associate professor

Leading organization: **Turin polytechnic university in Tashkent**

Defense will take place on on "8" January 2026 at 11⁰⁰ at the meeting of Scientific Council № DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at the meeting of the under the National University of Uzbekistan (Address: 100174, Tashkent, Almazar district, University Street 4. Tel.: +998-71-227-12-24, fax: +998-71-246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

The dissertation is available for review at the Information-Resource Center of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (registered under №250). Address: 100174, Tashkent, Almazar district, University Street 4. Tel.: +998-71-246-02-24.

The abstract of the dissertation was distributed on "29" December 2025.
(Register protocol № 2 dated "29" December 2025).

OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

O.S. Zikirov
Chairman of the Scientific Council on award of scientific degrees, D.P-M.S., Professor

R. M. Juraev
Scientific secretary of the Scientific Council on award of scientific degrees, PhD in Math. And Physics

R. N. Ganikhodjaev
Chairman of the scientific seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.P-M.S., Professor

INTRODUCTION (Abstract of PhD thesis)

The aim of research work is to study the properties of the weighted (m,ψ)-subharmonic measure and by means of them, to investigate the weighted capacities.

The research object. The research object consists of m-subharmonic functions, weighted (m,ψ)-subharmonic measures, weighted m-Green functions and weighted capacities in the theory of potentials.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

the concept of the weighted (m,ψ)-subharmonic measure was introduced and its potential properties were proved;

several important theorems concerning the (m,ψ)-regularity properties of compact sets were established by means of the weighted (m,ψ)-subharmonic measure;

it was proved that if the weighted m-Green function and the weighted m-subharmonic measure are Hölder continuous with respect to a compact set and the weight function is Hölder continuous on the compact set, then they are also Hölder continuous throughout the entire domain;

the notions of the $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-capacity and the (m,ψ)-capacity were introduced, and a number of their important properties were established;

an inequality expressing the relationship between the $\mathcal{P}_{(m,\psi)}$-capacity and the (m,ψ)-external capacity was proved.

Implementation of the research results. The scientific results obtained during the research of the dissertation are implemented in the following research projects:

the weighted (m,ψ)–subharmonic measure of a set E with respect to a domain $D \subset \mathbb{C}^n$ and the (m,ψ)–capacities were used in the fundamental scientific project FA-F-4-002 "m–subharmonic functions and their applications to calibrated geometry" (Reference No. 247/2-25 of the Regional Branch of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan – Khorezm Mamun Academy, dated October 7, 2025). The application of these scientific results made it possible to construct and develop the theory of weighted m-potentials;

the scientific results obtained in this research, which studies the potential properties of weighted m-subharmonic functions and the (m,ψ)-regularity of compact sets, were effectively used in the project carried out at Urgench State University in 2020-2022 under the European Union program 610170-EPP-1-2019-1-ES-EPPKA2-CBHE-JP "Establishment of training and research centers and courses development on intelligent big data analysis in Central Asia: ELBA" (Reference No. 06-201/4 of Abu Rayhon Beruni Urgench State University, dated November 11, 2025). The results of the study allowed us to analyze and evaluate the weighted m-capacity of the set E. It was also shown that the weighted m-capacity of E equals zero if and only if the set E is m-polar. In addition, the results and methods presented in this dissertation are used in special courses designed for master's and doctoral students in higher education institutions.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The total volume of the dissertation is 75 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (1 часть; part 1)

1. Kuldoshev K., Rakhimov K., On the Hölder continuity of weighted m-extremal functions // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2025, 18(6). –P. 809-818 (**Scopus, IF=0.315**).

2. Kuldoshev K., Weighted (m,ψ)-capacity $C_m(K,D,\psi)$ of a condenser (K,D) // Uzbek Mathematical Journal. 2025, vol. 69, is 2. –P. 153-164 (**01.00.00, № 6**).

3. Kuldoshev K., $\mathcal{P}_{(m,\psi,\delta)}$ – capacity and its properties // Bulletin of the Institute of Mathematics. 2025, vol. 8, is 5. –P. 40-47 (**01.00.00, № 17**).

4. Rakhimov K., Kuldoshev K., Hölder continuity of a weighted m-Green function and weighted m-subharmonic measure // Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan. 2025, № 5. –P. 21-25 (**01.00.00, № 7**).

5. Kuldoshev K., Narzillaev N., (m,ψ,δ) – regularity of compacts in $\mathbb{C}^n$ // Acta NUUz. 2024, vol 2.2.1. –P. 65-76 (**01.00.00, № 8**).

6. Kuldoshev K., Narzillaev N., Weighted m-subharmonic measure and (m,ψ)-regularity of compacts // Bulletin of National University of Uzbekistan. Mathematics and Natural Sciences. 2023, vol 6:2. –P. 76-86 (**01.00.00, № 8**).

7. Кулдашев К., Нарзиллаев Н. ψ-плюрисубгармоническая мера // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2021, № 2. –С. 15–20 (**01.00.00, № 7**).

8. Narzillaev N., Kuldashev K., The ψ–harmonic measure and its properties // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. 2020, vol. 3:4. –P. 463-473 (**01.00.00, № 8**).

II bo‘lim (2 часть; part 2)

1. Kuldoshev K., Hölder continuity of the weighted Green function // International scientific conference “Actual problems of algebra, analysis, topology and computational mathematics” –Tashkent, may 30-31, 2025. –P. 156-157.

2. Kuldoshev K., A generalization of condenser capacity // International scientific conference “Actual problems of algebra, analysis, topology and computational mathematics” –Tashkent, may 30-31, 2025. –P. 157-159.

3. Kuldoshev K., Hölder continuity of the weighted m-subharmonic measure// International scientific conference “Mathematical analysis and dynamical systems” –Tashkent, may 20-21, 2025. –P. 89.

4. Kuldoshev K., Salaeva D., Some properties of the weighted α-subharmonic measure // Республиканская научная конференция “Актуальные проблемы современной математики и её приложения” –Ташкент, 10-11 сентября, 2025. –P. 94-95.

5. Kuldoshev K., Weighted (m,ψ)-capacity $C_m(K,D,\psi)$ of a condenser (K,D) // Республиканская научная конференция “Современные методы математической физики и их приложения” –Ташкент, 22-24 апреля, 2025. –С. 160-161.

6. Kuldoshev K., (m,ψ,δ)-regularity of compacts // Международная научная конференция “Актуальные проблемы современной геометрии и топологии” –Ташкент, 27-29 октября, 2024. –С. 80-81.

7. Kuldoshev K., (m,ψ)-regularity of boundary compacts // International scientific conference “Actual problems of applied mathematics and information technologies– Al-Khwarizmi” –Tashkent, 22-23 October 2024. –P. 235-236.

8. Кулдашев К., Алиева Ф., Весовая m-субгармоническая мера граничных множеств // Тезисы. II Республиканская научно-практическая конференция молодых ученых “Математика, механика и интеллектуальные технологии” –Ташкент, 28–29 марта 2023. –С. 125–126.

9. Kuldoshev K., Alieva F., Aytjanova G., About one generalization of the plurisubharmonic measure // Abstracts. II Republican scientific and practical conference of young scientists. “Mathematics, mechanics and intellectual technologies” –Tashkent, 28-29 March 2023. –P. 45-46.

10. Narzillaev N., Kuldoshev K., Eshdavlatova S., Weighted harmonic measure // Proceedings of scientific conference “Actual problems of stochastic analysis” –Tashkent, 20-21 February 2021. –P. 223-224.

11. Кулдашев К., $(\psi - m)$-субгармоническая мера граничных множеств // Современные проблемы математики и прикладной математики: материалы Республиканской научной онлайн конференции молодых ученых. –Ташкент, 21 мая 2020. –С. 47-48.

12. Кулдашев К., ψ-Гармоническая мера // Республиканской научно-практической конференции “Статистика и её применение” –Ташкент, 11–18 октября 2019. –С. 363-364.

Avtoreferat «O‘zMU Xabarlari» jurnali tahririyatida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

№ 10-3279

Босишга рухсат этилди: 27.12.2025.
Бичими: 60x84 1/16 «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи 2,3. Адади 100. Буюртма: № 226
Тел: (99) 832 99 79; (77) 300 99 09
Гувоҳнома реэстр № 10-3279
“IMPRESS MEDIA” МЧЖ босмахонасида чоп этилди.
Манзил: Тошкент ш., Яккасарой тумани, Қушбеги кўчаси, 6-уй.