

**V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

MATEMATIKA INSTITUTI

SOBIROV ZARIFBOY AXMEDOVICH

**METRIK GRAFLARDA DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN
TO‘G‘RI VA TESKARI MASALALAR**

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA DOKTORLIK (DSc)
DISSERTATSIYASI
AVTOREFERATI**

TOSHKENT – 2024

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha doktorlik (DSc) dissertatsiyasi
avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата докторской диссертации (DSc) по физико-
математическим наукам**

**Content of doctoral dissertation (DSc) abstract on
physical-mathematical sciences**

Sobirov Zarifboy Axmedovich

Metrik graflarda differensial tenglamalar uchun to'g'ri va teskari
masalalar.....3

Собиров Зарифбой Ахмедович

Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений на
метрических графах.....27

Sobirov Zarifboy Akhmedovich

Direct and inverse problems for differential equations on metric
graphs.....53

E'lon qilingan ishlar ro'yxati

Список опубликованных работ
List of published works57

**V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

MATEMATIKA INSTITUTI

SOBIROV ZARIFBOY AXMEDOVICH

**METRIK GRAFLARDA DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN
TO‘G‘RI VA TESKARI MASALALAR**

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA DOKTORLIK (DSc)
DISSERTATSIYASI
AVTOREFERATI**

TOSHKENT – 2024

Fizika-matematika fanlari doktori (DSc) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2024.2.DSc/FM264 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (<http://kengash.mathinst.uz>) va “ZiyoNet” ta’lim axborot tarmog‘iga <http://www.ziynet.uz/> joylashtirilgan.

Ilmiy maslahatchi:	Ashurov Ravshan Radjabovich fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	Taxirov Jozil Ostanovich fizika-matematika fanlari doktori, professor Kulaev Ruslan Chermenovich fizika-matematika fanlari doktori, professor Kadirkulov Baxtiyor Jalilovich fizika-matematika fanlari doktori, dotsent
Yetakchi tashkilot:	Samarqand Davlat Universiteti

Dissertatsiya himoyasi V. I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2024 yil 25 iyun soat 16:00 dagi majlisida bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 9-uy. Tel.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V. I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (184-raqami bilan ro‘yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 9-uy. Tel.: (+99871) 207-91-40.

Dissertatsiya avtoreferati 2024-yil “11” iyun kuni tarqatildi.
(2024-yil “11” iyun dagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).



O. A. Roziqov
ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash
raisi, f.-m.f.d., akademik

J. K. Adashev
ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash
ilmiy kotibi, f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

A. A. Azamov
ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash
huzuridagi Ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d.,
akademik

KIRISH (doktorlik dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. So‘nggi vaqtlarda fanning jadal rivojlanayotgan sohalaridan biri differensial tenglamalarni metrik graflarda tadqiq etish hisoblanadi. Tarmoqlangan nozik tuzilmalar va metrik graflar ko‘plab amaliy masalalarni nazariy o‘rganishda model sifatida qo‘llaniladi. Ular zamonaviy fizika, biologiya, ekologiya, sotsiologiya, iqtisod va moliya sohasidagi ko‘plab murakkab tizimlarni o‘rganishda ishlatiladi. Misol uchun, metrik graflardagi boshlang‘ich va boshlang‘ich-chegaraviy masalalar tarmoqlangan tuzilmalar va tarmoqlardagi diffuzion va to‘lqinli jarayonlarni nazariy o‘rganishda keng qo‘llaniladi. Ta’kidlash joizki, yulduzsimon graf har qanday bog‘langan metrik graf uchun elementar qism sifatida muhim ahamiyatga ega. Boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni bunday oddiy grafda o‘rganish grafning ma’lum tarmoqlanish nuqtasida tarqalish tabiatini tushunish imkonini beradi.

So‘nggi yillarda kasr hosilali tenglamalar uchun boshlang‘ich va chegaraviy masalalarni o‘rganishga qiziqish sezilarli tarzda oshganini kuzatamiz. Bu turli fan sohalaridagi diffuziya va dispersiya bilan bog‘liq jarayonlarning o‘rganilishida kasr-integral hisobning qo‘llanilishi bilan bog‘liq. Matematik fizika va differensial tenglamalarning bu sohadagi eng dolzarb muammolaridan biri murakkab tarmoqlangan tuzilmalarda subdiffuziya jarayonlarini tadqiq etishdan iborat. Bunday masalalar, masalan, asab tizimlarida impuls tarqalishini o‘rganishda, anomaliyani hisobga olganda murakkab tarmoqlangan tuzilmalarda issiqlikning anomal tarqalishini o‘rganishda vujudga keladi.

O‘zbekistonda zamonaviy fanda ilmiy va amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan differensial tenglamalar va matematik fizikaning zamonaviy muammolariga alohida e’tibor qaratilgan. Shu jumladan, tarmoqlangan tuzilmalarda tenglamalarni o‘rganishga, kasr hosilali tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalarni tadqiq etishga alohida e’tibor qaratilgan. Bu yo‘nalish dunyo ilm-fanida nisbatan yangi bo‘lishiga qaramasdan, O‘zbekiston olimlari bu sohada sezilarli natijalarga erishishdi va ularni faol tadqiq etishda davom etmoqdalar. Matematika fanlarining, xususan, differensial tenglamalar va matematik fizikaning ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha dunyo standartlari darajasida ilmiy izlanishlar olib borish V.I.Romanovskiy nomidagi matematika Instituti faoliyatidagi asosiy masaladir¹. Metrik graflarda berilgan butun va kasr hosilali differensial tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalarni tadqiq etishni rivojlantirish differensial tenglamalar va matematik fizikaning zamonaviy nazariyasidagi muhim yo‘nalish hisoblanadi.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4947-sonli Farmoni, 2019-yil 9-iyuldagi “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I. Romanovskiy nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4387

¹ O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017-yil 18-maydagi “O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy-tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi 292-sonli qarori.

sonli qarori, 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to’g’risida”gi PQ-4708-sonli qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishga ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo’nalishlariga mosligi. Dissertatsiya O‘zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalar rivojlanishining “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo’nalishi doirasida bajarilgan.

Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi. Metrik graflarda berilgan differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni o‘rganish Voronej davlat universiteti (Rossiya), Istiqbolli tadqiqotlar xalqaro maktabi (SISSA, Italiya), Hagen Universiteti (Germaniya), Fridrix Aleksandr Erlanger Universiteti – Nyurnberg (Germaniya), Milan Universiteti (Italiya), Matematik fizika va amaliy matematika Dopler instituti (Chexiya), Ferbenksdagi Alyaska Universiteti (AQSH), Veytsman ilmiy instituti (Isroil), RFA Janubiy matematika instituti (Rossiya), Stokgolm universitetining Matematika instituti (Shvetsiya), MakMaster universiteti (Kanada) kabi ko‘plab yetakchi ilmiy-tekshirish institutlari va universitetlari olimlari tomonidan olib boriladi.

So‘nggi yillarda graflar va tarmoqlangan tuzilmalarda berilgan differensial tenglamalar nazariyasi bo‘yicha bir qancha muhim natijalarga erishildi. Xususan, quyidagi ilmiy natijalar olindi: transmissiyaning umumlashtirilgan-silliq sharoitida to‘lqin tenglamalari uchun sodda graflar bo‘yicha Dalember formulasining analogi olindi (Voronej davlat universiteti), ikkita dokritik fokuli nochiziqli hadli: standart kuch qonuni chiziqli bo‘lmagan va uchida joylashgan delta-tipdagi nochiziqlilik bo‘lgan yulduzsimon graflarda nochiziqli Shryodinger tenglamasining asosiy holatlarining mavjudligi o‘rganildi (SISSA, Milan universiteti), kompakt metrik graflarda laplasianning spektral bo‘shliqlari uchun yuqori chegaralar olindi, sikl va ikkita ulangan qirrali metrik grafda berilgan to‘lqin tenglamasining aniq nazorat qilinishi isbotlandi (Fridrix Aleksandr Erlanger Universiteti – Nyurnberg, Alyaska Feyrbanks universiteti, Stokgolm universiteti matematika instituti), sterjen tugunlarida elastik bo‘g‘imli ulangan tizimning deformatsiyasini modellashtiruvchi geometrik grafda berilgan to‘rtinchi tartibli differensial tenglama uchun chegaraviy masalaning xos qiymatlari karraliligi bahosi olindi va spektr nuqtalarining soddaligi shartlari o‘rnatildi (Janubiy matematika instituti), spektrni sonli hisoblagan holda magnit maydondagi kvadrat panjarali graflarda yuqori energiyalarda magnit maydon ustunlik qilishi ko‘rsatildi (Doppler matematik fizika va amaliy matematika instituti).

Mavzuning o‘rganilganlik darajasi. Graflarda berilgan differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni tadqiq etish ilk bor rus matematiklari Yu.V.Pokorniy, O.M.Penkin va ularning o‘quvchilarining ishlarida uchraydi. O‘tgan asrning 80-yillaridan boshlab ular tarmoqlangan sohalarda berilgan ikkinchi tartibli tenglama uchun chegaraviy masalaning yechimga egaligini o‘rganishgan, bu masalalar uchun Grin funksiyasini qurishgan, geometrik graflarda Shturm-Liuivill masalasini tadqiq qilishgan va graflarda Shturm-Liuivill nazariyasining to‘la analogini qurishgan. Ular

bilan deyarli bir vaqtda chex olimlari P.Eksner va P.Seba graflarda berilgan klassik tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni o'rgana boshlashgan. Graflarda berilgan differensial tenglamalar nazariyasini o'rganishga bo'lgan keyingi turtki bunday masalalarning kvant fizikasi va mexanikaga bo'lgan yangi tatbiqlari bilan bog'liq. 2000-yillar boshlarida Uzi Smilanski, Tsampikos Kottos va Sven Gnutsmanlar kvant grafi tushunchasini kiritishdi va kvant xaosi, sochilish xossarini va grafda berilgan laplasian yordamida shu graflaning spektral statistikasini tadqiq qila boshlashdi. Ruslan Kulayev tomonidan tugunlarda qattiq bog'lanish shartlari bilan tekis sterjenli tizimining elastik deformatsiyalarini modellashtiruvchi grafda berilgan to'rtinchi tartibli tenglama uchun chegaraviy masala yechimining nomanfiyligi va noassilyatsion xarakteri o'rganildi va masalaning Grin funksiyasi qurildi.

Real murakkab tarmoqlangan tuzilmalar, metrik graflardan farqli o'laroq, har bir alohida tarmoq va ulanish nuqtasi nolga teng bo'lmagan kesim yuziga ega. Shuning uchun, kesim yuzi yetarlicha kichik bo'lganda bunday tizimlarni metrik graflar bilan yaqinlashtirish masalasi muhim sanaladi. Pavel Eksner va Olaf Post o'z ishlarida ko'pxillikning nozik tarmoqlanishlarida Shryodinger tenglamasi yordamida graf uchidagi ulanish shartlarini yaqinlashtirish mumkinligini isbotladilar. Dell'Antonio va Kostaning ishlarida kvant tizimi evolyutsiyasining past energiyali qismini eng yaxshi tavsiflovchi dinamik tizimni olish uchun tanlanishi kerak bo'lgan yulduzsimon grafning uchidagi chegaraviy shartlarni tavsiflab o'tilgan. Karrali xarakteristikali uchinchi tartibli tenglama uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalarni o'rganish italyan matematigi L.Kattabriga, o'zbek matematiklari T.D.Jo'rayev va S.Abdinazarovlarning ishlaridan boshlangan. Ular o'z ishlarida bunday tenglamalar uchun potensiallar nazariyasini qurganlar va bu natijalarni fazoviy o'zgaruvchiga nisbatan toq tartibli yuqori hosilalarga ega bo'lgan tenglamalar holatiga umumlashtirganlar. Birinchi marta metrik graflardagi bunday tenglamalar biz tomonimizdan 2015-yilda o'rganilgan va bunda grafning ichki uchida ulanish (Kirxgoff) shartlarini qanday to'g'ri aniqlash usuli berilgan. Shuningdek, 2018-yildan boshlab paydo bo'lgan D.Mugnolo, D.Noya, Ch.Seifertning Eyri tipidagi tenglamalar va M.Kavalkantening chiziqli bo'lmagan Korteveg-de Friz tenglamasi bo'yicha ishlarida olgan natijalarini ham qayd etib o'tishimiz kerak. 2017-yildagi A.V.Psxuning O'zbek matematika jurnalida chop etilgan maqolasida karrali xarakteristikali va vaqt bo'yicha kasr hosilaga ega uchinchi tartibli tenglama uchun fundamental yechim qurilgan. Graflarda vaqt bo'yicha kasr hosilali Eyri tipidagi tenglama uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalar adabiyotlarda uchramaydi va dissertatsiya ishida birinchi marta o'rganilmoqda.

Keyingi yillarda ko'plab yetuk olimlar, jumladan, yurtdoshlarimiz Sh.A.Alimov, R.R.Ashurov, B.Qodirqulov, E.Karimov va boshqalar kasr hosilali tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalarni o'rganishga faol kirishdilar. Bu ko'p jihatdan kasr hosilali tenglamaning, xususan, subdiffuziya tenglamasining fizika, biologiya, mexanika, kimyo va boshqa sohalardagi ko'plab amaliy masalalarning matematik modeli sifatida qo'llanilishi bilan bog'liq. Metrik graflarda kasr hosilali differensial tenglamalar anomal jarayonlarni, xotira effektini hisobga olish kerak bo'lgan jarayonlarni yanada aniqroq tasvirlash imkonini beradi. Metrik graflarda vaqt bo'yicha kasr hosilali subdiffuziya tenglamalari yaqindan o'rganila boshlandi. Oxirgi besh yil ichida

G.Leugering, V.Mehandar, M.Mehraning bir qancha ishlari e'lon qilindi. Ular o'z ishlarida yulduzsimon grafda berilgan tenglamalar uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalarning yechimga ega ekanligini tadqiq qilganlar va bunday masalalarda chegaraviy boshqaruv masalasini o'rganganlar.

Dissertatsiya ishining ilmiy-izlanish rejalari bilan bog'liqligi. Dissertatsiya ishi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutining "Differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari" laboratoriyasining ilmiy-tadqiqot ishlarining rejadagi mavzulari, institutning F-FA-2021-424 raqamli "Butun va kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechish" mavzusidagi fundamental loyihasi, O'zbekiston Milliy universitetidaning №14-022 RG/MATHS/AS_G; UNESCO FR:324028610 raqamli xorijiy ilmiy-tadqiqot loyihasi hamda Germaniyaning Oldenburg universitetida bajarilgan Folksvagen fondining "Mezoskopik fizikadan kelib chiqadigan noxiziqli evolyutsion tenglamalar va metrik graflarda transport masalalari" mavzusida xorijiy grant loyihalari doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi metrik graflarda berilgan xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalar va teskari masalalarni yechish usullarini ishlab chiqish va mavjud metodlarini umumlashtirishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari quyidagilardan iborat:

metrik graflarda berilgan Eyri tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalarning yagona yechimga ega ekanligini o'rganish;

yarim cheksiz qirrali ochiq sodda metrik grafda Eyri tipidagi tenglama uchun Koshi masalasi yechimining integral ko'rinishini qurish;

metrik graflarda berilgan subdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalar yechimlarini tadqiq qilish;

teng qirrali metrik graflarda berilgan subdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalarning Grin funksiyalarini qurish;

daraxtsimon grafda issiqlik tarqalish tenglamasi va Shryodinger tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalar yechimlarining integral ifodalarini Fokas usulida qurish;

metrik graflarda berilgan subdiffuziya tenglamasi uchun to'g'ri va teskari masalalarning Sobolev fazolarida global bir qiymatli yechilishini tadqiq qilish.

Tadqiqotning obykti. Metrik graflarda berilgan butun va kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar.

Tadqiqotning predmeti. Graflarda boshlang'ich-chegaraviya masalalar, tenglama o'ng tomonini aniqlashga doir teskari masalalar.

Tadqiqotning usullari. Masalalarni o'rganishda potentsiallar usuli, integral tenglamalar usuli, Furye usuli, integral almashtirishlar usuli, aprior baholash usuli, funksional analiz va operatorlar nazariyasi usullari qo'llanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

yulduzsimon grafda berilgan Eyri tipidagi kasr tartibli tenglama uchun Koshi masalasining korrektiligi isbotlangan hamda boshlang'ich shart va tenglamaning o'ng tomoni orqali yechimning aniq integral ifodasi qurilgan;

vaqt bo'yicha kasr tartibli hosilali Eyri tipidagi tenglamalar boshlang'ich-chegaraviy masalalarni yechishning potentsillar usuli metrik graflar uchun

umumlashtirilgan va Eyri tenglamasi uchun birinchi boshlang'ich-chegaraviy masalaning yagona yechimga ega ekanligi isbotlangan;

yulduzsimon va zinapoyasimon grafda berilgan vaqt bo'yicha kasr hosilali parabolik tenglamalar uchun birinchi, ikkinchi va aralash chegaraviy masalalarning Grin funksiyalari qurilgan hamda Fokas usuli yordamida issiqlik tarqalish va Shrodinger tenglamalari uchun sodda metrik graflarda chegaraviy masalalar yechimlarining integral ifodalari olingan;

chekli bog'lamli metrik grafda Xilfer tipidagi kasr tartibli hosilali psevdosubdiffuziya tenglamasi uchun ikkita teskari masala bir qiymatli yechilishi isbotlangan;

Sobolev fazolarida yulduzsimon grafda berilgan subdiffuziya tenglamasi uchun to'g'ri va teskari masalalarning global yagona yechimi mavjudligi isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari. Dissertatsiya ishida olingan natijalar nazariy xarakter kasb etib olingan natijalar tarmoqlangan tuzilmalarda to'liq va diffuzion jarayonlarni tadqiq qilishda muhim boshlang'ich nuqta bo'lib, bunday murakkab tuzilmalarda tarmoqlanish nuqtasida tarqalish jarayonini tushunish uchun foydali bo'ladi.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Tadqiqot natijalarining va xulosalarining ishonchliligi differensial tenglamalar, matematik analiz, funksional analiz va operatorlar nazariyasi metodlariga asoslangan qat'iy matematik isbotlar bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati metrik graflarda berilgan differensial tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalar nazariyasini rivojlantiradi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati tarmoqlangan tuzilmalarda to'liq tarqalishni matematik modellashtirishda, tarmoqlanish nuqtasida o'tish va qaytish koeffitsientlarini hisoblashda, asab tizimlarida impulsning tarqalish jarayonini matematik modellashtirishda qo'llanilishi mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Metrik graflarda differensial tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalar bo'yicha olingan natijalar asosida:

subdiffuziya tenglamasi va vaqt bo'yicha kasr tartibli hosilali Eyri tipidagi tenglama uchun metrik graflarda boshlang'ich-chegaraviy masalalar bo'yicha olingan natijalardan NIOKTR 122041800029-5 raqamli "Asosiy va aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy va boshqaruv masalalari va taqsimlangan parametrlil tizimlarni tadqiq qilish" mavzusidagi xorijiy loyihasida vaqt bo'yicha kasr hosilali to'liq va diffuziya tenglamalarini yechishda foydalanilgan (Rossiya Fanlar Akademiyasi Kabardin-Balkar ilmiy markazining amaliy matematika va avtomatlashtirish institutining 2024 yil 9-apreldagi №24-sonli ma'lumotnomasi, Rossiya Federatsiyasi). Ilmiy natijalarning qo'llanilishi vaqt bo'yicha kasr hosilali to'liq va diffuziya tenglamalari va tenglamalar sistemalari uchun lokal va nolokal masalalarni yechishni va yechimning integral ifodasini olish imkonini bergan;

Sobolev fazolarida yulduzsimon grafda berilgan subdiffuziya tenglamasi uchun to'g'ri va teskari masalalarning global yechimidan AR09259394 raqamli "Musbat operatorli evolyutsion tenglamalar uchun teskari masalalar" mavzusidagi xorijiy loyihasida vaqtli kasr hosilali issiqlik tarqalish tenglamasi uchun nolokal chegaraviy va

teskari manba masalasini yechishda foydalanilgan (Matematika va matematik modellashtirish institutining 2024 yil 2-apreldagi №01-06/061-sonli ma'lumotnomasi, Qozog'iston). Ilmiy natijaning qo'llanishi kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun teskari masalalarni yechish algoritmlarini qurish va bunday masalalarning yechimga ega ekanligini isbotlash imkonini bergan;

yulduzsimon grafda berilgan Eyri tipidagi kasr tartibli tenglama uchun Koshi masalasi qo'yilishi hamda boshlang'ich shart va tenglamaning o'ng tomoni orqali yechimning aniq integral ifodasidan xorijiy ilmiy jurnallarda chop etilgan ilmiy maqolalarda Airy va Korteweg-de Friz tenglamalari uchun chegaraviy masalalarni yechishda foydalanilgan (Analysis&PDE, 2018, 11 (7), 1625-1652; Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik, 2018, 69 (5), 124; Nonlinearity, 2020, 34 (5), 3373-3410). Ilmiy natijalarni qo'llanishi metrik graflarda Eyri va Korteweg-de Vries tenglamalari uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalarni yechishning imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 9 ta xalqaro va 4 ta respublika ilmiy anjumanlarda muhokamadan o'tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e'lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo'yicha jami 39 ta ilmiy ishlar chop etilgan bo'lib, shundan 17 tasi O'zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasi doktorlik (DSc) dissertatsiyalarining asosiy ilmiy natijalarini chop etish uchun tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda chop etilgan, 10 tasi xorijiy jurnallarda chop etilgan, 7 tasi respublika jurnallarida chop etilgan ilmiy maqolalardir.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, 4 ta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 150 betni tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Dissertatsiyaning kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruratini asoslash, tadqiqotning respublika fan va texnikasini rivojlantirishning ustuvor yo'nalishlariga muvofiqligi, dissertatsiya mavzusi bo'yicha xorijiy mutaxassislar tomonidan olib borilgan ilmiy ishlarga taqriz berilgan va mahalliy olimlar tomonidan masalaning o'rganilganlik darajasi, maqsad, vazifalar, tadqiqot obyekti va predmeti, ilmiy yangilik bayoni, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati, asosiy natijalarni amalga oshirish to'g'risidagi ma'lumotlar aks ettirilgan va nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi haqida ma'lumot berilgan.

Dissertatsiyaning birinchi bobida vaqt bo'yicha butun va kasr hosilali Eyri tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalar qaralgan. Qo'yilgan masalalarni yechishda potentsiallar usuli va energiya integrallari usuli qo'llanilgan.

Birinchi va ikkinchi paragraflarida metrik graflar va kasr tartibli hosilalarga, vaqt bo'yicha butun va kasr hosilali Eyri tenglamasi uchun potentsiallar nazariyasiga oid dastlabki ma'lumotlar berilgan.

Uchinchi paragrafida grafning uchi deb ataluvchi O nuqtada kesishgan $m + k$ ta yarim cheksiz qirralardan tashkil topgan Γ yulduzsimon grafda Eyri tenglamasi uchun Koshi masalasi tadqiq etilgan. Graf qirralarini $B_j, j = 1, 2, \dots, k + m$ orqali belgilaymiz. Har bir B_j qirrada x_j koordinatani $j = \overline{1, k}$ bo'lganida $-\infty$ dan 0 gacha,

$j = \overline{k+1, k+m}$ bo‘lganida $-\infty$ dan 0 gacha aniqlaymiz. Grafning har bir qirrasida 0 koordinata graf uchidagi O nuqtaga mos keladi (1-rasm).

Γ grafning har bir qirrasida ushbu

$$\partial_{0,t}^\alpha u_j(x,t) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_j(x,t) = f_j(x,t), \quad 0 < t \leq T, \quad x \in B_j, \quad (1)$$

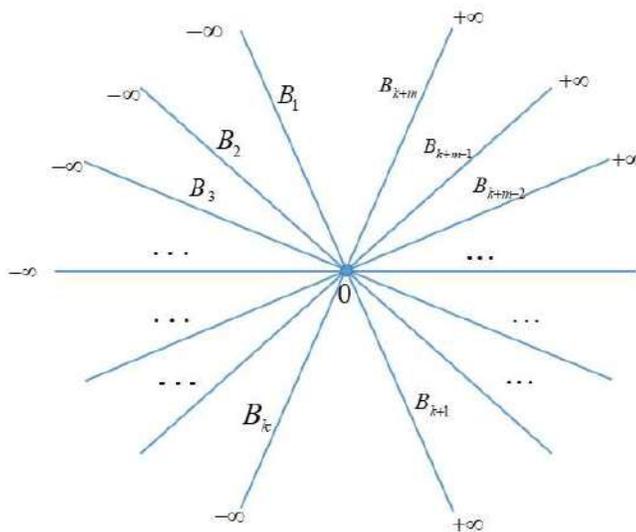
bu yerda $0 < \alpha \leq 1$, Kaputo tipidagi kasr hosilali Eyri tenglamasini va quyidagi

$$u_j(x,0) = \phi_j(x), \quad x \in \overline{B_j}, \quad j = \overline{1, k+m} \quad (2)$$

boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini qidiraylik. Bunda kasr tartibli integral va kasr tartibli Kaputo hosilalari quyidagicha aniqlanadi:

$$D_{0,t}^{-\alpha} g(t) \equiv I_{0,t}^\alpha g(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{g(\xi)}{(t-\xi)^{1-\alpha}} d\xi, \quad \alpha > 0, t > 0,$$

$$\partial_{0,t}^\alpha g(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{g(\xi) - g(0)}{(t-\xi)^{\alpha-n+1}} d\xi, \quad 0 < \alpha < 1, t > 0.$$



1-rasm. Γ yulduzsimon graf.

Ma’lumki, Eyri tenglamasining kesmada bir qiymatli yechilishi uchun boslang‘ich shartdan tashqari uchta shart – ikkita chap uchida va bitta o‘ng uchida chegaraviy shartlar berish kerak. Demak, $m + k$ ta yarim cheksiz qirrali graf bo‘lgan holatda graf uchida $k + 2m$ ta ulanish shartlarini berish kerak bo‘ladi. Bu shartlarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$a_j u_j(0,t) = u_1(0,t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad j = \overline{2, k+m}, \quad (3)$$

$$u_x^+(0,t) = B u_x^-(0,t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{a_j} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_j(x,t) \Big|_{x=0} = \sum_{i=k+1}^{k+m} \frac{1}{a_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_i(x,t) \Big|_{x=0}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

bu yerda $a_1 \equiv 1, a_j \neq 0, j = \overline{1, k+m}$,

$u^- = (u_1, u_2, \dots, u_k)^T$, $u^+ = (u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_{k+m})^T$ B -matritsa $m \times k$ o'ldamli o'zgaras matritsa. Shuningdek $u = (u_1, u_2, \dots, u_{k+m})^T$. belgilashdan foydalanamiz. Bundan tashqari, $\phi_j(x)$, $j = \overline{1, k+m}$, funksiyalar yetarlicha silliq va chegaralangan funksiyalar va (3) shartlarni qanoatlantirishini talab qilamiz. (5) ko'rinishidagi shart grafning tarmoqlanish nuqtasida oqimning lokal saqlanishini ifodalaydi va odatda Kirxgoff sharti deb ataladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, yuqoridagi (3) – (5) ulanish shartlari mumkin bo'lgan yagona shartlar emas. Bizning tanlovimiz uchun asosiy turtki, ular yechimning yagonaligini ta'minlashi va agar yechimlar cheksizda (nolgacha) so'nsa, normaning (energiya) saqlanishini ta'minlashi bilan bog'liq.

1-masala. (1) tenglamaning (2) boshlang'ich, (3) – (5) ulanish shartlarini qanoatlantiruvchi

$$Q_1(\Gamma) = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_{k+m}) : u_j \in C^{3,0}(B_j \times (0, T]), \partial_{0,t}^\alpha u_j \in C(B_j \times (0, T]), \\ u_j \in C^{2,0}(\overline{B_j} \times [0, T]), j = \overline{1, k+m}\},$$

sifga tegishli yechimi topilsin.

1-teorema. $(B^T B - E)$ simmetrik matritsa ixtiyoriy $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)^T \in R^k$ uchun $\zeta^T \cdot (E_k - B^T B) \cdot \zeta \geq 0$ shartni qanoatlantirsin, bunda E_k - k -tartibli birlik matritsa. U holda 1-masala bittadan ortiq yechimga ega bo'lmaydi.

Bu teorema energiya integrallari metodi bilan isbotlanadi. Endi masalaning yechimi mavjudligi haqidagi savolga javob beramiz. Oldin $0 < \alpha < 1$ holatni ko'rib chiqamiz.

(1) tenglamaning fundamental yechimi quyidagicha aniqlanadi:

$$G_\alpha^{2\alpha/3}(x, t) = \frac{1}{3t^{1-2\alpha/3}} \begin{cases} \phi(-\frac{\alpha}{3}, \frac{2\alpha}{3}; \frac{x}{t^{\alpha/3}}), & x \leq 0, \\ -2\text{Re}[e^{2\pi i/3} \phi(-\frac{\alpha}{3}, \frac{2\alpha}{3}; e^{2\pi i/3} \frac{x}{t^{\alpha/3}})], & x > 0. \end{cases}$$

Bundan tashqari, (1) tenglamaning quyidagi maxsus yechimini aniqlaymiz:

$$V_\alpha^{2\alpha/3}(x, t) = \frac{1}{3t^{1-2\alpha/3}} \text{Im}[e^{2\pi i/3} \phi(-\frac{\alpha}{3}, \frac{2\alpha}{3}; e^{2\pi i/3} \frac{x}{t^{\alpha/3}})], x \geq 0.$$

2-teorema. Ixtiyoriy $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)^T \in R^k$ uchun $\zeta^T \cdot (E_k - B^T B) \cdot \zeta \geq 0$, $f_j(x, t) \in C^{0,1}(B_j \times [0, T])$, $f_j(x, 0) = 0$, $\phi_j(x) \in C(\overline{B_j})$, $j = \overline{1, k+m}$ va bu funksiyalar cheksizlikda nolga aylansin. U holda 1-masalaning yagona yechimi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$u(x, t) = F(x, t) + \int_0^t U(x-0, t-\tau) M^{-1} H(\tau) d\tau,$$

bu yerda

$$F_j(x, t) = \int_{B_j} I_{0,t}^{1-\alpha} G_\alpha^{2\alpha/3}(x-\xi, t-0) \phi_j(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{B_j} G_\alpha^{2\alpha/3}(x-\xi, t-\tau) f_j(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

$$U(x,t) = \begin{pmatrix} G_\alpha^{2\alpha/3}(x,t)I_k & | & 0_{k \times m} & | & 0_{k \times m} \\ 0_{m \times k} & | & G_\alpha^{2\alpha/3}(x,t)I_m & | & V_\alpha^{2\alpha/3}(x,t)I_m \end{pmatrix},$$

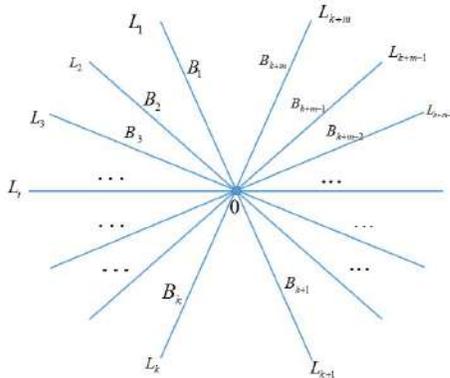
$$M = \begin{pmatrix} 1_{(k-1) \times 1} & -diag(a_2, \dots, a_k) & 0_{(k-1) \times m} \\ 1_{m \times 1} & -diag(a_{k+1}, \dots, a_{k+m}) & \frac{\sqrt{3}}{2} diag(a_{k+1}, \dots, a_{k+m}) \\ B & -I_m & \frac{\sqrt{3}}{2} I_m \\ \frac{1}{a_1} \dots \frac{1}{a_k} & \frac{2}{a_{k+1}} \dots \frac{2}{a_{k+m}} & 0_{1 \times m} \end{pmatrix},$$

$$H = 3 \begin{pmatrix} \frac{2\alpha}{3} D_{0,t}^{\frac{2\alpha}{3}}(a_2 F_2(0,t) - F_1(0,t)) \\ \frac{2\alpha}{3} D_{0,t}^{\frac{2\alpha}{3}}(a_3 F_3(0,t) - F_1(0,t)) \\ \dots \\ \frac{2\alpha}{3} D_{0,t}^{\frac{2\alpha}{3}}(a_{k+m} F_{k+m}(0,t) - F_1(0,t)) \\ \frac{\alpha}{3} D_{0,t}^{\frac{\alpha}{3}}(F_x^+(0,t) - B F_x^-(0,t)) \\ \left(\sum_{i=k+1}^{k+m} \frac{1}{a_i} F_{i,xx}(0,t) - \sum_{j=1}^k \frac{1}{a_j} F_{j,xx}(0,t) \right) \end{pmatrix}.$$

$\alpha = 1$ bo'lgan limit holatda shunga o'xshash natija olingan.

Birinchi bobning to'rtinchi paragrafida chekli qirrali yulduzsimon grafda berilgan Eyri tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masala qaralgan.

Aytaylik, $\Gamma_1 = \Gamma^- \cup \Gamma^+$ graf k ta kiruvchi va m ta chiquvchi qirralardan tashkil topgan bo'lsin. Graf qirralarini $B_j, j = \overline{1, k+m}$ orqali belgilaymiz (2-rasm). Kiruvchi $B_j \in \Gamma^-$ qirralarda koordinatalarni L_j dan 0 ($L_j < 0, j = \overline{1, k}$) gacha aniqlaymiz, chiquvchi $B_j \in \Gamma^+$ qirralarda esa koordinatalarni 0 dan L_i ($L_i > 0, i = \overline{k+1, k+m}$) gacha aniqlaymiz.



2 rasm. Γ_1 yulduzsimon graf.

$f = (f_1, f_2, \dots, f_{k+m})^T$, $u^- = (u_1, u_2, \dots, u_k)^T$, $u^+ = (u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_{k+m})^T$ va $u = \begin{pmatrix} u^+ \\ u^- \end{pmatrix}$ bo'lsin. Γ_1 grafning har bir qirrasida vaqt bo'yicha kasr hosilali Eyri tenglamasini

$$\partial_{0t}^\alpha u_j(x,t) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_j(x,t) = f(x,t), \quad 0 < t \leq T, x \in B_j, \quad (6)$$

quyidagi boshlang'ich shartlar bilan

$$u_j(x,0) = u_{0j}(x), \quad x \in \overline{B_j}, \quad j = \overline{1, k+m} \quad (7)$$

qaraylik.

Graf uchida quyidagi ulanish shartlarining bajarilishini talab qilamiz:

$$Au(0,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

$$u_x^+(0,t) = Bu_x^-(0,t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9)$$

bu yerda A – matritsa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_{k+m-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{k+m} \end{pmatrix}$$

ko‘rinishidagi, B – esa $m \times k$ o‘lchamdagi o‘zgarmas matritsalar.

Bundan tashqari, grafning tarmoqlanish nuqtasida quyidagi Kirxgoff shartlari bajarilsin:

$$C^- \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^-(x,t) \Big|_{x=0} = C^+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^+(x,t) \Big|_{x=0}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (10)$$

bu yerda $C^- = (\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_k})$, $C^+ = (\frac{1}{a_{k+1}}, \dots, \frac{1}{a_{k+m}})$.

Grafning chegaraviy nuqtalarida quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$u(x,t) \Big|_{\partial\Gamma} = \varphi(t), \quad \frac{\partial}{\partial x} u^-(x,t) \Big|_{\partial\Gamma_1} = \phi(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (11)$$

bu yerda $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k+m})^T$, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k)^T$ berilgan funksiyalar.

$Q_2(\Gamma) = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_{k+m}) : u_j(x,t) \in C^{3,0}(B_j \times (0, T]), D_{0,t}^\alpha u_j \in C(B_j \times (0, T]),$

$$u_j \in C^{1,0}(\overline{B_j} \times [0, T]), \quad j = \overline{1, k},$$

$$u_{j,x} \in C((B_j \cup \{0\}) \times [0, T]), \quad j = \overline{k+1, k+m},$$

$$u_{j,xx} \in C((B_j \cup \{0\}) \times [0, T]), \quad j = \overline{1, k+m}\}.$$

bo‘lsin.

2-masala. $\Gamma_1 \times [0, T]$ sohada (6) tenglamaning (7) – (11) shartlarni qanoatlantiruvchi $Q_2(\Gamma_1)$ sinfga tegishli yechimi topilsin.

3-teorema. $(B^T B - E)$ simmetrik matritsa ixtiyoriy $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)^T \in R^k$ uchun $\zeta^T \cdot (E_k - B^T B) \cdot \zeta \geq 0$ shartni qanoatlantirsin. U holda agar 2-masala yechimga ega bo‘lsa, bu yechim yagonadir.

Teorema energiya integrali metodi bilan isbotlangan.

Yechim mavjudligi haqidagi teoremani isbotlashda potentsiallar metodi qo'llanilgan. Chegaraviy shartlar va grafning ichki uchidagi shartlarni qanoatlantirgan holda ikkinchi tur Volterra integral tenglamalari sistemasi olingan va bu sistemaning yechimga ega ekanligi ko'rsatilgan.

4-teorema. *Ixtiyoriy* $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)^T \in R^k$ uchun $\zeta^T \cdot (E_k - B^T B) \cdot \zeta \geq 0$, $u_j^0(x) \in C(\overline{B_j})$, $f_j(x, t) \in C^{0,1}(\overline{b_j} \times [0, T])$, $f_j(x, 0) = 0$, $j = \overline{1, k+m}$, $\varphi(t)$ va $\phi(t)$ funksiyalar $[0, T]$ da uzluksiz differensallanuvchi bo'lsin. U holda 2-masala yagona yechimga ega bo'ladi.

Dissertatsiyaning ikkinchi bobida vaqt bo'yicha kasr hosilali diffuzion-to'lqin tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalar qaralgan. **Birinchi paragrafda** teng qirrali grafda berilgan kasr hosilali diffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalarning Grin funksiyalari qurilgan.

Aytaylik, $\Gamma = (E, V)$ chekli, teng qirrali, bog'lamli graf bo'lsin. Bunda $E = \{b_k\}_{k=1}^N$ - qirralar to'plami, V - graf uchlari to'plami. $u: \Gamma \rightarrow R$ grafda aniqlangan funksiya, $u|_{b_k} = u_k$ bo'lsin. Bizga bu funksiyani $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ ko'rinishda belgilash qulay. Grafda Laplas operatorini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\Delta_E u = \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 u_N}{\partial x_N^2} \right).$$

Γ grafda quyidagi subdiffuziya tenglamasini qaraylik

$$D_{0,t}^\alpha u(x, t) - \Delta_E u(x, t) = f(x, t), \quad 0 < t \leq T, \quad (12)$$

bu yerda $0 < \alpha < 1$, Quyidagi boshlang'ich shartlar bajarilsin

$$\lim_{t \rightarrow 0} I_{0,t}^{1-\alpha} u(x, t) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma. \quad (13)$$

Graf qirralari ulanish nuqtasida $u \in C(\Gamma)$ uzluksizlik sharti va quyidagi Kirxgoff shartlari bajarilsin:

$$\Delta_v u = 0, \quad v \in V \setminus \partial\Gamma, \quad 0 < t \leq T, \quad (14)$$

bu yerda $\Delta_v f := \sum_{b_k \sim v} \frac{1}{w_k} \sigma_{b_k, v} \frac{\partial f_k(x_k)}{\partial x_k} \Big|_v$ - Neyman-Kirxgoff operatori, $w_k = const > 0$.

Chegaraviy nuqtalarda quyidagi Dirixle chegaraviy shartlaridan

$$u(x, t) \Big|_{\partial\Gamma} = \psi(x, t), \quad x \in \partial\Gamma, \quad 0 < t \leq T \quad (15)$$

yoki quyidagicha aralash chegaraviy shartlardan

$$\begin{aligned} u(x, t) \Big|_{D_1} &= \psi(x, t), \quad x \in D_1, \quad 0 < t \leq T, \\ u_x(x, t) \Big|_{D_2} &= \phi(x, t), \quad x \in D_2, \quad 0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (16)$$

foydalanamiz, bu yerda $D_1 \cup D_2 = \partial\Gamma$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

3-masala. (12) tenglamaning (13) – (15) shartlarni qanoatlantiruvchi regulyar yechimini toping.

Bu yerda masalaning regulyar yechimi deganda ushbu sinfdan bo'lgan yechimni tushunamiz:

$$Q_3(\Gamma) = \{u = (u_1, \dots, u_m) : D_{0,t}^\alpha u, \Delta_E u \in C(\Gamma_0 \times (0, T)), \\ t^{1-\alpha} u \in C(\Gamma \times [0, T]), t^{1-\alpha} u_{k,x} \in C(\bar{b}_k \times [0, T]), k = \overline{1, N}\},$$

4-masala. (12) tenglamaning (13) – (14) va (16) shartlarni qanoatlantiruvchi regulyar yechimini toping.

Bu yerda masalaning regulyar yechimi deganda ushbu sinfdan bo'lgan yechimni tushunamiz:

$$Q_4(\Gamma) = \{u = (u_1, \dots, u_m) : \Delta_E u, D_{0,t}^\alpha u \in C(\Gamma_{\text{int}} \times (0, T)), \\ t^{1-\alpha} u \in C(\Gamma \times [0, T]), t^{1-\alpha} u_{k,x} \in C(\bar{b}_k \times [0, T]), k = \overline{1, N}\}$$

Masalaning yechimi yagonaligi energiya integrallari metodi bilan isbotlangan.

Yuqorida keltirilgan masalalarni ikki xil grafda qaraymiz: 1) teng qirrali yulduzsimon grafda; 2) zinapoyasiman grafda.

Oldin zinapoyasimon grafda Grin funksiyalarini quramiz. Γ yulduzsimon graf bitta O nuqtada ulangan m ta teng qirralarga ega bo'lsin. Har bir qirradagi koordinatani bu qirrani $[0, L]$ kesmaga izometrik akslantirish yordamida aniqlaymiz. Bunda, har bir qirrada O nuqtaning koordinatasini nolga teng deb olamiz. (15) chegaraviy shartlarni $u_j(L, t) = \psi_j(t)$, $j = \overline{1, m}$, ko'rinishda yozib olamiz.

5-teorema. Aytaylik, $\varphi(x) \in C(\Gamma)$, $t^{1-\alpha} \psi_j(t) \in C[0, T]$, ($j = \overline{1, m}$, $T > 0$) va $t^{1-\alpha} f(x, t) \in C^{0,1}(\Gamma \times [0, T])$ bo'lsin. U holda 3-masalaning yagona yechimi ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$u(x, t) = -\int_0^t (G_\xi(x, t; L, \tau) u(L, \tau) +) d\tau - \int_0^L \varphi(\xi) G(x, t; \xi, \tau) d\xi - \\ - \int_0^t \int_0^L G(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

bu yerda $u = (u_1, \dots, u_m)^T$, $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ va $G(x, t; \xi, \tau)$ Grin funksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$G = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n M^n (\Gamma(x - \xi + 2nL, t - \tau) + M\Gamma(x + \xi + 2nL, t - \tau)),$$

bu yerda $\Gamma(s, t) = \frac{1}{2} t^{\alpha/2-1} e_{1, \alpha/2}^{1, \alpha/2} \left(-\frac{|s|}{t^{\alpha/2}} \right)$, $M = SK^{-1}$,

$$K = \begin{pmatrix} w_1 & w_1 & \dots & w_1 & 1 \\ -w_2 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -w_3 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -w_m & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -w_1 & -w_1 & \dots & -w_1 & 1 \\ w_2 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & w_3 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & w_m & 1 \end{pmatrix}.$$

Endi 4-masala uchun yulduzsimon grafda Grin funksiyasini keltiramiz. Γ grafning dastlabki k ta ($k < m$) qirrasining chegaraviy uchlari D_1 ni tashkil qilsin.

6-teorema. Aytaylik, $\varphi(x) \in C(\Gamma)$, $t^{1-\alpha}\psi_i(t) \in C[0, T]$, $i = \overline{1, k}$, $t^{1-\alpha}\phi_j(t) \in C[0, T]$, $j = \overline{k+1, m}$ va $t^{1-\alpha}f(x, t) \in C^{0,1}(\Gamma \times [0, T])$ bo'lsin. U holda 4-masalaning yagona yechimi ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$u(x, t) = \int_0^t G_1^{(N)} \left(x, t; L, \tau \right) \frac{\partial u_N(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=L} - G_1^{(D)}(x, L; t, \tau) u_D(L, \tau) d\tau - \int_0^L \varphi(\xi) G_1(x, t; \xi, \tau) d\xi - \int_0^t \int_0^L G_1(x, t; \xi, \tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

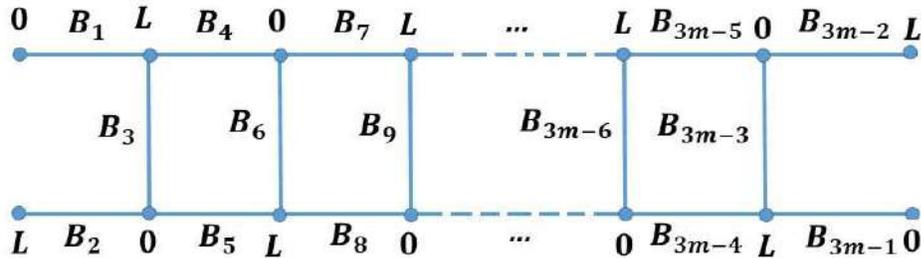
bu yerda

$$G_1(x, t; \xi, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi^n M^n (\Gamma(x - \xi + 2nL, t - \tau) + M\Gamma(x + \xi + 2nL, t - \tau)),$$

$$G_1^{(D)} = \begin{pmatrix} G_1^{11} & G_1^{12} & \dots & G_1^{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_1^{k1} & G_1^{k2} & \dots & G_1^{km} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad G_1^{(N)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ G_1^{k+1,1} & G_1^{k+1,2} & \dots & G_1^{k+1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_1^{m1} & G_1^{m2} & \dots & G_1^{mm} \end{pmatrix},$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} -E_k & 0 \\ 0 & E_{m-k} \end{pmatrix}, \quad u_D = (u_1, \dots, u_k, 0, \dots, 0)^T, \quad u_N = (0, \dots, 0, u_{k+1}, \dots, u_m)^T.$$

Endi $3m - 1$ ta teng qirraga ega bo'lgan ($N = 3m - 1$) zinapoyasimon grafni qaraylik (3-rasm). Graf qirralarining koordinatalarini qirraning 0 dan L gacha bo'lgan intervalga izometrik akslantirish yordamida aniqlaymiz. Graf qirralarini B_k , $k = \overline{1, 3m - 1}$ orqali belgilaymiz (3-rasm).



3 rasm. $3m - 1$ ta qirrali zinapoyasimon graf (m - toq son).

Aytaylik, m toq son bo'lsin. Chegaraviy shartlarni quyidagicha yozib olamiz

$$u_1(0, t) = \psi_1(t), \quad u_{3m-1}(0, t) = \psi_2(t),$$

$$u_2(L,t) = \psi_3(t), \quad u_{3m-2}(L,t) = \psi_4(t), \quad 0 < t \leq T.$$

7-teorema. *Aytaylik, m toq son, Γ - yuqorida tasvirlangan $3m-1$ teng qirrali zinapoyasimon graf, $t^{1-\alpha}\psi_i(t) \in C[0,T]$, $i = \overline{1,4}$, $\varphi_j(x) \in C[0,L]$, $j = \overline{1,3m-1}$ u $t^{1-\alpha}f(x,t) \in C^{0,1}(\Gamma \times [0,T])$ bo'lsin. U holda 3-masala quyidagi ko'rinishdagi yagona yechimga ega bo'ladi*

$$u(x,t) = \int_0^t G_\xi(x,t;0,\tau)U^{1,3m-1}(0,\tau)d\tau - \int_0^t G_\xi(x,t;L,\tau)U^{2,3m-2}(L,\tau)d\tau - \int_0^L \varphi(\xi)G(x,t;\xi,\tau)d\xi - \int_0^t \int_0^L G(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

bu yerda $U^{i,j} = (0,0,\dots,0,u_i,0,\dots,0,u_j,0,\dots,0)^T$, $F = (f_1,\dots,f_{3m-1})^T$,

$$G = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(M^n \Gamma(x - \xi + 2nL, t - \tau) + (DC^{-1})^n \Gamma(x + \xi + 2nL, t - \tau) \right),$$

$$M = DC^{-1}TQP^{-1}T^{-1},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{D}_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{D}_{(m-3)/2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D}_j = \begin{pmatrix} w_{6j+2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -w_{6j+3} & w_{6j+3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{6j+4} & 0 & 1 \\ 0 & -w_{6j+5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w_{6j+6} & w_{6j+6} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -w_{6j+7} & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{C}_{(m-3)/2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_j = \begin{pmatrix} -w_{6j+2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ w_{6j+3} & -w_{6j+3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w_{6j+4} & 0 & 1 \\ 0 & w_{6j+5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{6j+6} & -w_{6j+6} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_{6j+7} & 1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{P}_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{P}_{(m-3)/2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{P}_j = \begin{pmatrix} w_{6j+1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -w_{6j+3} & w_{6j+3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -w_{6j+4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{6j+5} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -w_{6j+6} & w_{6j+6} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -w_{6j+8} & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{Q}_{(m-3)/2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{Q}_j = \begin{pmatrix} -w_{6j+1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ w_{6j+3} & -w_{6j+3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{6j+4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w_{6j+5} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & w_{6j+6} & -w_{6j+6} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_{6j+8} & 1 \end{pmatrix}$$

va $(3m-1) \times (3m-1)$ o'lchamli T matrisa esa birlik matrisada har bir $j = \overline{0, (m-3)/2}$ da $6j+1$ va $6j+2$ nomerli satrlarni almashtirishdan hosil bo'lgan matrisa.

m juft son bo'lgan holatda ham zinapoyasimon graf uchun Grin funksiyasi shunga o'xshash qurilgan.

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida vaqt bo'yicha Hilfer kasr hosilali psevdosubdiffuziya tenglamasining bir qiymatli yechimga ega ekanligi masalasi qaralgan. Ba'zi yordamchi tushunchalarni kiritamiz.

Quyidagi uzluksiz funksiyalar fazolarini kiritamiz

$$C_\gamma[a, b] = \{f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : (t-a)^\gamma f(t) \in C[a, b]\}, 0 \leq \gamma < 1,$$

va

$$C_\gamma^n[a, b] = \{f \in C^{n-1}[a, b] : f^{(n)} \in C_\gamma, n \in \mathbb{N}\}, C_\gamma^0[a, b] = C_\gamma[a, b].$$

Bu fazolarda norma quyidagicha kiritiladi

$$\|f\|_{C_\gamma} = \|(t-a)^\gamma f(t)\|_C \quad \text{va} \quad \|f\|_{C_\gamma^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \|f^{(k)}\|_C + \|f^{(n)}\|_{C_\gamma}.$$

Bu fazolar quyidagi xossalarni qanoatlantiradi.

- a) $C_0^0[a, b] = C[a, b]$;
- b) $C_\gamma^n(a, b) \subset AC^n[a, b]$;
- b) $C_{\gamma_1}[a, b] \subset C_{\gamma_2}[a, b], 0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 < 1$.

α tartibli va t bo'yicha μ tipli Hilfer kasr hosilasi $D_{0+}^{\alpha, \mu}$ deb quyidagicha aniqlangan operatorga aytiladi:

$$(D_{0,t}^{\alpha, \mu} u)(t) = I_{0,t}^{\mu(l-\alpha)} \frac{d^l}{dt^l} (I_{0,t}^{(1-\mu)(l-\alpha)} u)(t), \quad l-1 < \alpha < l, \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad l \in \mathbb{N},$$

bu yerda o'ng tomondagi integrallar va hosilalarning mavjudligi talab etiladi.

$D_{0,t}^{\alpha, \mu}$ hosilani Riman-Liuvill va Kaputo hosilalarning interpolatsiyasi sifatida

ham qarash mumkin: $D_{0,t}^{\alpha, \mu} = \begin{cases} D_{0,t}^\alpha, & \mu = 0, \\ \partial_{0,t}^\alpha, & \mu = 1. \end{cases}$

Aytaylik, $\Gamma = (V, E)$ – bog'lamli chekli metrik graf bo'lsin, bu yerda $V = \{\nu_k\}_1^n$ – graf uchlar to'plami, $E = \{b_k\}_{k=1}^j$ esa oxirlari V ga tegishli nuqtalarda bo'lgan

qirralar (intervallar) to‘plami. Shuningdek, $\{q_1, q_2, \dots, q_{m_1}\} = \partial\Gamma \subset V$ – grafning chegaraviy uchlari to‘plami bo‘lsin. Grafning b_k qirrasida x_k koordinatani bu qirraning $(0, L_k)$, $k = 1, 2, \dots, j$ ga izometrik akslantirishi yordamida aniqlaymiz.

Yuqorida aniqlangan Γ grafning har bir qirrasida quyidagi kasr hosilali differensial tenglamani qaraymiz

$$D_{0,t}^{\alpha,\mu} u^{(k)}(x,t) = a_1 u_{xx}^{(k)}(x,t) + a_2 D_{0,t}^{\alpha,\mu} u_{xx}^{(k)}(x,t) + a_3 u^{(k)}(x,t) + f^{(k)}(x,t), \quad (17)$$

$x \in b_k, 0 < t < T, k = \overline{1, j}$, bu yerda $D_{0+}^{\alpha,\mu}$ – Hilfer kasr hosila operatori $0 < \alpha < 1, 0 \leq \mu \leq 1, a > 0, b > 0, c \leq 0$.

Grafda aniqlangan funksiya uchun $u = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(j)})^T$, $f = (f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(j)})^T$ belgilashdan foydalanamiz.

Endi tenglama o‘ng tomonini aniqlashga oid birinchi teskari masalani ta‘riflaymiz. $f^{(k)}(x,t) = f^{(k)}(x)g(t)$ bo‘lsin. Bunda $f^{(k)}(x)$ ma‘lum funksiyalar, $g(t)$ esa noma‘lum, $g(t) > 0, 0 \leq t \leq T$ deb qaraymiz.

5-masala. (17) tenglamani va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\{u^{(k)}(x,t), f^{(k)}(x)\}$ funksiyalar topilsin:

$$\begin{aligned} 1) \quad & t^{1-\gamma} u^{(k)}(x,t) \in C_{x,t}^{1,\gamma}([0, l_k] \times [0, T]), \\ & D_{0t}^{\alpha,\mu} u_{xx}^{(k)}(x,t), D_{0t}^{\alpha,\mu} u^{(k)}(x,t) \in C((0, l_k) \times (0, T)), \\ & t^{1-\gamma} u_{xx}^{(k)}(x,t) \in C((0, l_k) \times [0, T]), \gamma = \alpha + \mu - \alpha\mu, \quad k = \overline{1, j}; \end{aligned}$$

2) grafning tarmoqlanish nuqtalarida (ichki uchlarda) yechim quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

(A) *Uzluksizlik sharti.* Har bir ichni ν uchda $b_k \sim \nu$ shartni qanoatlantiruvchi k lar uchun $u^{(k)}(x,t)$ funksiyalarning shu uchdagi qiymatlari o‘zaro teng;

(B) *Tarmoqlanish nuqtasida local oqim saqlanish qonuni:* har bir ichki ν uchda barcha $u^{(k)}(x,t), b_k \sim \nu$, funksiyalarning bir tomonlama hosilalari yig‘indisi nolga teng:

$$\sum_{b \sim \nu} \sigma_{b,\nu} u_x^{(k)}(x,t)|_{\nu} = 0, \quad \nu \in V \setminus \partial\Gamma, t \in (0, T] \quad (18)$$

3) chegaraviy shartlarni:

$$u_x^{(k)}(x,t)|_{q_k} = 0, q_k \in \partial\Gamma, t \in (0, T], k = \overline{1, m_1}; \quad (19)$$

4) boshlang‘ich shartlarni

$$I_{0t}^{1-\gamma} u^{(k)}(x,t)|_{t=0} = \varphi^{(k)}(x), x \in B_k, k = \overline{1, j}, \quad (20)$$

va quyidagi qo‘shimcha shartlarni

$$u^{(k)}(x,T) = \psi_k(x), x \in B_k, k = \overline{1, j}, \quad (21)$$

bunda $\psi_k(x), \varphi_k(x)$ - yetarlicha silliq funksiyalar.

8-teorema. $\varphi_k(x), \psi_k(x)$ va $g(t)$ funksiyalar uchun quyidagi shartlar bajarilsin:

1. $g(t) \in C[0, T]$, $0 < m \leq g(t) \leq M < +\infty$, $m, M = \text{const}$;
2. $\varphi_k(x), \psi_k(x) \in C^2[0, l_k]$, $\varphi_k'''(x)$, $\psi_k'''(x)$ funksiyalar $(0, l_k)$ da absolyut integrallanuvchi;
3. $\varphi_k(x)$ funksiyalar (18)-(19) shartlarni, $\varphi_k''(x)$ funksiyalar (18) shartlarni qanoatlantirsin;
4. $\psi_k(x)$ funksiyalar (18)-(19) shartlarni, $\psi_k''(x)$ funksiyalar (18) shartlarni qanoatlantirsin.

U holda 5-masala yagona yechimga ega.

Ikkinchi teskari masalani ta'riflaymiz.

6-masala. (17) tenglamani, uzluksizlik sharti, (18) – (20) shartlarni va quyidagi qo'shimcha shartni

$$\int_{\Gamma} u(x, t) dx = \Phi(t), \quad t \in [0, T].$$

qanoatlantiruvchi $\{u^{(k)}(x, t), f^{(k)}(x)\}$ funksiyalar topilsin. Bu yerda $\Phi(t)$ va $\varphi_k(x)$ lar yetarlicha silliq, uzluksiz funksiyalar.

9-teorema. $\varphi^{(k)}(x)$ va $f^{(k)}(x)$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1. $f^{(k)}(x) \in C[0, l_k]$, $\frac{\partial}{\partial x} f^{(k)}(x) \in (0, l_k)$ da absolyut integrallanuvchi;

2. $\int_{\Gamma} f(x) dx \neq 0$;

3. 8-teoremaning 1) -3) shartlari o'rinli.

U holda 6-masala yagona yechimga ega.

Ikkinchi bobning uchinchi paragrafida yarim cheksiz qirrali yulduzsimon ochiq grafda har xil tartibli kasr hosilali subdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich masala qaralgan.

Yulduzsimon Γ garfni qaraylik. U O umumiy uchga ega n ta B_1, B_2, \dots, B_n qirraga ega bo'lsin. B_j qirrada x_j koordinatalar bu qirraning $(0, +\infty)$ intervalga izometrik akslantirishi orqali aniqlaylik. Har bir qirrada O uchga $x_j = 0$ koordinata mos kelsin. Keyingi matnda qulaylik uchun x_j o'rniga x ishlatamiz. Grafning har bir qirrasida ushbu subdiffuziya tenglamasini qaraylik

$$D_{0,t}^{\alpha_k} u_k = u_{k,xx} + f_k(x, t), \quad x > 0, 0 < t \leq T \quad (22)$$

bu yerda $0 < \alpha_k < 2$, $k = 1, 2, \dots, n$. Biz $m - 1 < \alpha_k \leq m$, $m \in \{1, 2\}$ munosabat bajariladi deb qaraymiz.

Boshlang'ich shartlar quyidagicha aniqlansin

$$D_{0,t}^{\alpha_k - l} u_k(x, +0) = \varphi_{k,l}(x), \quad 0 \leq x < +\infty, l = \overline{1, m}, k = \overline{1, n}. \quad (23)$$

Grafning tarmoqlanish nuqtasida ushbu ulanish (Kirxgoff) shartlari bajarilsin

$$D_{0,t}^{\alpha_i - m} u_i(0, t) = D_{0,t}^{\alpha_j - m} u_j(0, t), \quad i, j = \overline{1, n}, i \neq j, \quad (24)$$

$$\sum_{k=1}^n w_k D_{0,t}^{\alpha_k - m} u_{k,x} (+0, t) = \lambda D_{0,t}^{\alpha_1 - m} u_1(0, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (25)$$

bu yerda $w_1 = 1, w_k = \text{const} > 0, k = 2, 3, \dots, n, \lambda = \text{const} \geq 0$.

(21) shart odatda δ tipdagi shart deyiladi. $\lambda = 0$ holatda bu shart oqimning tarmoqlanish nuqtasida lokal saqlanish (Kirxgoff) shartini ifodalaydi.

Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ funksiya (22)-(25) masalaning regulyar yechimi deyiladi:

- 1) $D_{0,t}^{\alpha_k} u_k(x, t), u_{k,xx} \in C((0, +\infty) \times (0, T])$,
 - $D_{0,t}^{\alpha_k - l} u_k, D_{0,t}^{\alpha_k - l} u_{k,x} \in C([0, +\infty) \times [0, T]), \quad 1 \leq l \leq m, k = 1, 2, \dots, n$;
 - 2) (19) tenglama $(x, t) \in (0, +\infty) \times (0, T]$ bo'lganida bajariladi;
 - 3) (20) boshlang'ich shartlar va (24), (25) chegaraviy shartlar bajariladi.
- $D_{0,t}^{\alpha} v = v_{xx}$ tenglamaning fundamental yechimi deb ushbu funksiyaga aytiladi:

$$U(x, t) = \frac{t^{\beta-1}}{2} e_{1,\beta}^{1,\beta} \left(-\frac{|x|}{t^\beta} \right), \quad \beta = \frac{\alpha}{2}, x \in R.$$

Energiya integrallari metodi va davom ettirish metodi orqali masala yechimining yagonaligi isbotlangan.

$$V_\sigma(\Gamma) = \left\{ (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)) : \lim_{x \rightarrow +\infty} D_{0,t}^{\alpha_k - l} u_k \cdot \exp(-\sigma x) = 0, 0 < t \leq T, l = \overline{1, m}, k = \overline{1, n} \right\}.$$

bo'lsin.

10-teorema. *Ixtiyoriy $\sigma_0 > 0$ uchun (22) – (25) masala $V_{\sigma_0}(\Gamma)$ da bittadan ortiq yechimga ega emas.*

11-teorema. *Aytaylik $t^{1-\alpha_k} f_k(x, t), t^{1-\beta_k} f_{k,t}(x, t) \in C(\overline{B}_k \times [0, T]),$
 $\varphi_{k,l}(x) \in C[0, +\infty), f_k(x, t), k = \overline{1, n},$
*funksiyalar $t > 0$ ning har bir fiksirlangan qiymatida x ga nisbatan $[0, +\infty)$ da Gyolder ma'nosida uzluksiz va quyidagi limitlar $[0, T]$ da tekis yaqinlashsin:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_{k,l}(x) \exp \left(-\rho_k x^{\frac{2}{2-\alpha}} \right) = 0, l = \overline{1, m}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} t^{1-\alpha} f_k(x, t) \exp \left(-\rho_k x^{\frac{2}{2-\alpha}} \right) = 0,$$

bu yerda $\rho_k < (1 - \beta_k) \left(\frac{\beta_k}{T} \right)^{\frac{\beta_k}{1-\beta_k}}$.

Bundan tashqari quyidagi moslik shartlari ham bajarilsin:
 $\varphi_{k,l}(0) = \varphi_{j,l}(0), k, j = \overline{1, n}, k \neq j, \sum_{k=1}^n \varphi'_{k,l}(0) = \lambda \varphi_{1,l}(0), l = \overline{1, m}$. *U holda (22)–(25) masala yechimga ega.*

Ko'rinib turibdiki, bu holda o'zgaruvchilarni ajratish usuli qo'llash imkonsiz. Mavjudlik teoremasini isbotlashda potentsiallar usulidan foydalanildi va masalaning

yechimi umumlashtirilgan integral Abel integral tenglamasini o'rganishga keltiriladi.

Uchinchi bobda metrik graflarda boshlang'ich-chegaraviy masalalarni yechishning unifitsirlangan almashtirish usuli (yoki Fokas usuli) keltirilgan. Bu usul yordamida metrik graflardagi boshlang'ich-chegaraviy masala yechimining va uning hosilasining graf uchlaridagi noma'lum qiymatlariga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi. **Uchinchi bobning birinchi paragrafi** yordamchi xarakterga ega bo'lib, unda Fokas usulining mohiyati tushuntiriladi.

Uchinchi bobning ikkinchi paragrafida yulduzsimon grafda berilgan Shryodinger tenglamasi uchun chegaraviy masalalar o'rganilgan.

n ta chekli b_1, b_2, \dots, b_n qirradan va m ta $b_{n+1}, b_{n+2}, \dots, b_{n+m}$ yarim cheksiz qirrani grafning uchi deb nomlanuvchi O nuqtada ulanishidan hosil bo'lgan Γ_3 metrik grafni qaraymiz. Oldingi holatlardagidek, $b_j \sim (0, L_j)$, $j = \overline{1, n}$, va $b_r \sim (0, +\infty)$, $r = \overline{n+1, n+m}$ mosliklar bilan qirralardagi koordinatalarni aniqlaymiz.

Grafning har bir qirrasida Shryodinger tenglamasining

$$iq_t^{(j)}(x, t) = \sigma q_{xx}^{(j)}(x, t), \quad x \in b_j, t > 0, j = \overline{1, n+m}, \quad (26)$$

ushbu boshlang'ich shart

$$q^{(j)}(x, 0) = q_0^{(j)}(x), \quad x \in \overline{b_j}, j = \overline{1, n+m}, \quad (27)$$

va chegaraviy shartlarni

$$q^{(j)}(L_j, t) = h_0^{(j)}(t), \quad t \geq 0, j = \overline{1, n} \quad (28)$$

qanoatlantiruvchi yechimini qaraylik. Grafning uchida yechim quyidagi ulanish (Kirxgoff) shartlarini qanoatlantirsin

$$q_x^{(i)}(0, t) = q_x^{(j)}(0, t), \quad t \geq 0, i, j = \overline{1, n+m}, \quad (29)$$

$$\sum_{j=1}^{n+m} \delta_j^2 q_x^{(j)}(0, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (30)$$

Faraz qilaylik, chegaraviy shartlar yetarlicha silliq va absolyut integrallanuvchi funksiyalar boshlang'ich funksiyalar o'z aniqlanish sohalarida ikkinchi tartibli hosilasigacha uzluksiz, absolyut integrallanuvchi hosilalarga ega bo'lsin.

$$D^{(2)} = \{k \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(-ik^2) < 0, \operatorname{Im}(k) > 0\},$$

$$D^{(4)} = \{k \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(-ik^2) < 0, \operatorname{Im}(k) < 0\}$$

bo'lsin.

12-teorema. Γ_3 grafda (26) – (30) masalaning yechimi quyidagi ko'rinishga ega

$$q^{(j)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx - wt} \hat{q}_0^{(j)}(k) dk -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^{(4)}} e^{ikx-ikL_j-wt} \frac{\hat{q}_0^{(j)}(k) - \hat{q}_0^{(j)}(-k) + 2e^{-ikL_j} k \sigma \tilde{h}_0^{(j)}(w,t)}{B_j} dk + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^{(2)}} e^{ikx-wt} \frac{e^{-ikL_j} \hat{q}_0^{(j)}(-k) - e^{ikL_j} \hat{q}_0^{(j)}(k) - 2k \sigma \tilde{h}_0^{(j)}(w,t) + 2e^{-ikL_j} i \sigma \tilde{g}_0(w,t)}{B_j} dk,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q^{(r)}(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt} \hat{q}_0^{(j)}(k) dk + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^{(2)}} e^{ikx-wt} \hat{q}_0^{(j)}(-k) dk + \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{\partial D^{(2)}} e^{ikx-wt} i \sigma \tilde{g}_1(w,t) dk, \quad j = \overline{1, n}, \quad r = \overline{n+1, n+m}
\end{aligned}$$

bu yerda $\tilde{h}_0^{(j)}(w,t) = \int_0^t e^{ws} h_0^{(j)}(s) ds, j = \overline{1, n}, \hat{q}_0^{(j)}(k) = \int_0^{L_j} e^{-ikx} q_0^{(j)}(x) dx, j = \overline{1, n+m},$

$$w = -i\sigma k^2$$

$$i\sigma \tilde{g}_1(w,t) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \delta_j^2 \frac{B_j}{A_j} + \sum_{r=n+1}^{n+m} \delta_r^2}.$$

$$\left[\sum_{j=1}^n \frac{\delta_j^2}{A_j} \left[e^{ikL_j} \hat{q}_0^{(j)}(k) - e^{-ikL_j} \hat{q}_0^{(j)}(-k) + 2k \sigma h_0^{(j)}(w,t) \right] + \sum_{r=n+1}^{n+m} \delta_r^2 \hat{q}_0^{(r)}(k) \right],$$

$$A_j = e^{ikL_j} - e^{-ikL_j}, B_j = e^{ikL_j} + e^{-ikL_j}, j = \overline{1, n}.$$

Uchinchi bobning uchinchi paragrafida Fokas usuli umimiyroq graflarda, xususan har bir uchida qo‘shimcha qirra biriktirilgan uchburchaklardan tashkil topgan graf, daraxtsimon graf kabi umumiy ko‘rinishdagi metrik graflarda bo‘shlang‘ich-chegaraviy masalalarni yechishga qo‘llanishi mumkinligi ko‘rsatilgan.

To‘rtinchi bobda subdiffuziya tenglamasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalaning Sobolev fazolarida yechimga egaligi masalasi o‘rganilgan. Buning uchun kasr tartibli Sobolev fazosi tushunchasi kiritilgan. **To‘rtinchi bobning birinchi paragrafida** metrik graflardagi funksional fazolar haqida dastlabki ma’lumotlar keltirilgan.

Aytaylik $G_\tau = \{(x,t) : x \in \Gamma, t \in (0, \tau]\}, 0 \leq \tau \leq T$. $W_2^{2,\alpha}(G_\tau)$ Gilbert fazosi bo‘lib, o‘zi va $\partial_{0,t}^\alpha u$, u_x va u_{xx} umumlashgan hosilalari $L_2(G_\tau)$ tegishli funksiyalarni o‘z ichiga oladi. Bunda skalyar ko‘paytma quyidagicha aniqlanadi

$$(u, v)_{W_2^{2,\alpha}(G_\tau)} = \int_{G_\tau} (uv + \partial_{0,t}^\alpha u \partial_{0,t}^\alpha v + u_x v_x + u_{xx} v_{xx}) d\Gamma dt,$$

va norma: $\|\cdot\|_{W_2^{2,\alpha}(G_\tau)}$ kabi belgilanadi.

$W_{2,0}^{2,\alpha}(G_\tau) = \{u \in W_2^{2,\alpha}(G_\tau) : u|_{\partial\Gamma} = 0\}$ bo'lsin.

To'rtinchi bobning ikkinchi paragrafida $W_{2,0}^{2,\alpha}(G_T)$ Sobolev sinfidagi funksiyalar sinfida metrik graflarda subdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masala tadqiq qilingan.

Vaqt bo'yicha kasr hosilali tenglamani

$$\partial_{0,t}^\alpha u - u_{xx} = h(x,t), \quad x \in \Gamma_{\text{int}}, t \in (0, T), \quad (31)$$

bu yerda $0 < \alpha < 1$, quyidagi boshlang'ich

$$u(x, 0) = 0, \quad (32)$$

va ushbu chegaraviy

$$u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (33)$$

shartlar bilan qaraylik.

Grafning ν ichki uchida quyidagi uzluksizlik va Kirxgoff shartlarining bajarilishini talab qilamiz

$$u \in C(\Gamma), \quad \Delta_\nu u = 0. \quad (34)$$

Ladijenskaya tomonidan taklif qilingan funksional usulni qo'llab quyidagi natija olindi.

13-teorema. *Aytaylik, $h \in L_2(G_T)$. U holda (31) – (34) masala $W_{2,0}^{2,\alpha}(G_T)$ fazoda yagona yechimga ega. Bundan tashqari quyidagi aprior baho o'rinli:*

$$\int_0^t \int_\Gamma ((\partial_{0,t}^\alpha w)^2 + w_{xx}^2) d\Gamma d\tau + \frac{1}{T^\alpha \Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \int_\Gamma w_x^2 d\Gamma d\tau \leq \int_0^t \int_\Gamma h^2 d\Gamma d\tau.$$

To'rtinchi bobning uchinchi paragrafida

$$\partial_{0,t}^\alpha u - u_{xx} = f(t)g(x,t) + h(x,t), \quad x \in \Gamma_{\text{int}}, t \in (0, T), \quad (35)$$

$0 < \alpha < 1$, tenglamaning va (33) – (34) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi uchun $\{u, f\} \in W_{2,0}^{2,\alpha}(G_T) \times L_2(0, T)$ juftlikni aniqlash haqidagi teskari masala o'rganilgan. Bunda, noma'lum o'ng tomonni aniqlash uchun, quyidagi qo'shimcha integral shartni beramiz:

$$\sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} v_j(x) u_j(x, t) dx = E(t). \quad (36)$$

Aytaylik, quyidagi shartlar bajarilsin

$$(H1) : g \in L_\infty(0, T, L_2(\Gamma)), v_j \in H_{\text{Dir}}^1(\Gamma), E \in H_\alpha(0, T), |g^*| \geq p > 0.$$

14-teorema. *Aytaylik, $h(x, t) \in L_2(G_T)$ bo'lsin va (H1) shartlar bajarilsin. U holda (35), (32) – (34), (36) teskari masala yagona $\{u, f\} \in W_{2,0}^{2,\alpha}(G_T) \times L_2(0, T)$ yechimga ega. Bundan tashqari, quyidagi baho o'rinli*

$$\|f\|_{L_2(0, T)} \leq C_2 \|E\|_{H_\alpha},$$

bu yerda $C_2 = \text{const} > 0$.

XULOSA

Dissertatsiya ishida metrik graflarda vaqt bo'yicha butun va kasr hosilalari evolyutsiya tenglamalari uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalar tadqiq qilingan. Bunda potentsiallar usuli, o'zgaruvchilarni ajratish (Furye) usuli, unifitsirlangan almashtirish usuli (Fokas usuli), aprior baholash usuli va funksional usullardan foydalanilgan.

Dissertatsiya ishining asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

- Birinchi marotaba metrik graflarda vaqt bo'yicha butun va kasr hosilali Eyri tenglamalari uchun korrekt boshlang'ich-chegaraviy masalalar qo'yildi va tadqiq qilindi;
- Yulduzsimon grafda Eyri tenglamasi uchun Koshi masalasining korrektiligi haqidagi teoremlar isbotlandi. Yechimlarning boshlang'ich funksiya va tenglamaning o'ng tomoni orqali aniq integral ifodasi topildi;
- Yulduzsimon grafda Eyri tenglamasi uchun birinchi boshlang'ich-chegaraviy masalaning bir qiymatli yechilishi isbotlangan. Shu bilan birga, metrik graflarda boshlang'ich-chegaraviy masalalarni yechish uchun potentsiallar usuli umumlashtirildi;
- Vaqt bo'yicha kasr hosilasi parabolik tenglama uchun birinchi, ikkinchi va aralash chegaraviy masalalarning Grin funksiyalari yulduzsimon va narvon shaklidagi teng qirrali graflarda qurildi;
- Xilfer hosilali psevdosubdiffuziya tenglamasi uchun noma'lum o'ng tomonni aniqlash masalasi bir qiymatli yechilishi isbotlangan;
- Chekli va yarim cheksiz qirrali yulduzsimon grafda va daraxt grafda Shryodinger va issiqlik tarqalish tenglamalari uchun chegaraviy masalalar yechimlarining integral ifodasi qurilgan;
- Yulduzsimon grafda subdiffuziya tenglamasi uchun to'g'ri va teskari masalalarning Sobolev fazolarida bir qiymatli yechilishi isbotlangan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И. РОМАНОВСКОГО**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

СОБИРОВ ЗАРИФБОЙ АХМЕДОВИЧ

**ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ НА МЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ
ДОКТОРСКОЙ (DSc) ДИССЕРТАЦИИ ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ
НАУКАМ**

ТАШКЕНТ – 2024

The theme of the doctoral (DSc) dissertation on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2024.2.DSc/FM264.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics and National University of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the <http://kengash.mathinst.uz> and in the website of "ZiyoNet" of information and educational portal <http://www.ziyo.net>.

Scientific consultant: **Ashurov Ravshan Radjabovich**
Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor

Official opponents: **Takhirov Jozil Ostonovich**
Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor

Kulaev Ruslan Chermenovich
Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor

Kadirkulov Bakhtiyor Jalilovich
Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Dosent

Leading organization: **Samarkand State University**

Defense will take place "25" June 2024 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy (is registered № 184) (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on "11" June 2024 year
(Mailing report № 2 on "11" June 2024 year)



U.A. Rozikov
Chairman of Scientific Council on
award of scientific degrees, D.F.-
M.S., Academician

J.K. Adashev
Scientific secretary of Scientific
Council on award of scientific
degrees, D.F.-M.S., Senior
researcher

A.A. Azamov
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of
scientific degrees, D.F.-M.S.,
Academician

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. В последнее время одним из бурно развивающихся направлений науки является исследование дифференциальных уравнений на метрических графах. Разветвленные тонкие структуры и метрические графы широко используются в качестве модели в теоретических исследованиях многих прикладных задач. Они используются при изучении многих сложных систем современной физики, биологии, экологии, социологии, экономики и финансов. К примеру, начальные и начально-краевые задачи на метрических графах широко используются для теоретического исследования диффузионных и волновых процессов в разветвленных структурах и сетях. Надо отметить, что звездообразный граф имеет важное значение как элементарная часть любого связного метрического графа. Исследование начально-краевых задач на таком простом графе дает возможность понять природу рассеяния в определенной точке ветвления графа.

В последние годы наблюдается значительный интерес к изучению начальных и краевых задач для уравнений дробного порядка. Это связано с тем, что дробно-интегральное исчисление находит применение в исследовании процессов диффузии и дисперсии в различных областях науки. Одной из актуальнейших проблем математической физики и дифференциальных уравнений в этой области является исследование процессов субдиффузии в сложных разветвленных структурах. Такие задачи возникают, для примера, в исследовании распространения импульса в нервных системах, в изучении аномального распространения тепла в сложных разветвленных структурах с учетом аномалий.

В Узбекистане уделяется особое внимание современным направлениям дифференциальных уравнений и математической физики, которые имеют научное и практическое значение в современной науке. В том числе, особое внимание уделяется изучению уравнений в разветвленных структурах, исследованию прямых и обратных задач для уравнений с дробными производными. Несмотря на то, что эти направления являются сравнительно новыми в мировой науке, ученые Узбекистана достигли значительных результатов в этих областях и продолжают активно исследовать их. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям математических наук, в частности, дифференциальным уравнениям и математической физике является основной задачей и направлением в деятельности Института математики имени В.И. Романовского¹. Развитие исследований прямых и обратных задач на метрических графах для уравнений с целыми и дробными производными являются важнейшими направлениями современной теории

¹ Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

дифференциальных уравнений и математической физики и, несомненно, играют важную роль в реализации указанного выше постановления Кабинета министров республики Узбекистан.

Тема и объект исследования настоящей диссертации соответствуют задачам, обозначенным в Указе Президента Республики Узбекистан №УП 4979 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях № ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий в Республике Узбекистан: «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации. Исследование начально-краевых задач для дифференциальных уравнений на метрических графах ведутся учеными многих ведущих научно-исследовательских институтов и университетов, таких как Воронежский государственный университет (Россия), Международная школа перспективных исследований (SISSA, Италия), Университет Хагена (Германия), Университет Фридриха Александра Эрлангер-Нюрнберг (Германия), Миланский университет (Италия), Институт Доплера математической физики и прикладной математики (Чехия), Университет Аляски в Фэрбенксе (США), Научный институт Вейцмана (Израиль), Южный математический институт РАН (Россия), Институт математики Стокгольмского университета, Университет МакМастера (Канада).

В последние годы получены ряд важных результатов по теории дифференциальных уравнений на графах и разветвленных структурах. В частности, получены следующие научные результаты: Получена аналог формулы Даламбера на компактных графах для волновых уравнений при обобщенно-гладких условиях трансмиссии (Воронежский государственный университет), Исследована существование основных состояний нелинейного уравнения Шредингера на звездных графах с двумя докритическими фокусирующими нелинейными членами: стандартной степенной нелинейностью и нелинейностью дельта-типа, расположенной в вершине (SISSA, Миланский университет), получены верхние оценки спектральных лакун лапласиана на компактных метрических графах, доказана точная управляемость волнового уравнения на метрическом графе, состоящем из цикла и двух присоединенных ребер (Университет Фридриха Александра Эрлангер-Нюрнберг, Университет Аляски в Фэрбенксе, Институт математики

Стокгольмского университета), установлены условия простоты точек спектра и получены оценки кратности собственных значений краевой задачи для дифференциального уравнения четвертого порядка на геометрическом графе, моделирующем упругие деформации системы упруго шарнирно закрепленных в узлах стержней (Южный математический институт), численно рассчитав спектр показана, что в квадратных решетчатых графах в магнитном поле при высоких энергиях доминирует магнитное поле (Институт Доплера математической физики и прикладной математики).

Степень изученности темы. Исследование граничных задач для дифференциальных уравнений на графах берет начало с работ русских математиков Ю.В.Покорного, О.М.Пенкина и их учеников. Начиная 80-х годов прошлого столетия, они исследовали разрешимость краевых задач для уравнения второго порядка на сети, построили функции Грина этих задач, исследовали задачу Штурма-Лиувилля на геометрических графах и построили полный аналог теории Штурма-Лиувилля на графах. Почти одновременно с ними чешские ученые П.Экснер и П.Себа начали исследовать краевые-задачи для классических уравнений на графе. Дальнейший толчок в развитие теории дифференциальных уравнений на графах связана с новыми приложениями таких задач в квантовой физике и механике. В начале 2000 годов Узи Смилански, Тампикос Коттос и Свен Гнутцман ввели понятия квантового графа и начали исследовать квантовый хаос, свойства рассеяния и спектральную статистику на таких графах посредством лапласиана заданной на графе. Руслан Кулаевым построены функции Грина и исследованы свойства не отрицательности и неосцилляции решений краевых задач для уравнения четвертого порядка на графе, моделирующая упругие деформации плоской стержневой системы с условиями жесткого соединения в узлах.

В реальных сложных разветвленных структурах, в отличие от метрических графов, каждое отдельная соединение имеет ненулевое поперечное сечение. Поэтому важен вопрос аппроксимации таких систем с метрическими графами, когда поперечное сечение достаточна мало. Павел Экснер и Олаф Пост в своих работах доказали, что условия соединений на вершинах графа могут быть аппроксимированы с помощью уравнения Шредингера в тонких разветвленные многообразиях. В работах Делл'Антонио и Коста описаны граничные условия в вершине звездообразного графа, которые необходимо выбрать для получения динамической системы, наилучшим образом описывающей низкоэнергетическую часть эволюции квантовой системы.

Исследовании начально-краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками начались с работ итальянского математика Л.Каттабрига, узбекских математиков Т.Д.Джураева и С.Абдиназарова. В своих работах они построили теорию потенциалов для таких уравнений и обобщили эти результаты в случай уравнений с высокими производными нечетного порядка по пространственной переменной. Впервые такие уравнение в метрических метрических графах были исследованы нами в 2015

году, где были даны корректные условия склеивания (Кирхгоффа) на внутренней вершине графа. Здесь также надо отметить результаты Д. Мугноло, Д. Нойа, Ч. Сейферта для уравнений типа Эйри и работы М.Кавальканте для нелинейного уравнения Кортевега – де Фриза, которые появились начиная с 2018 года. Фундаментальное решение для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками и с дробной производной по времени построена в работе А.В.Псху в 2017 году. Начально-краевые задачи для уравнения типа Эйри с дробной производной по времени на графах в литературе не встречается и исследуется в диссертационной работе впервые.

В последние годы многие ведущие ученые, в том числе, и наши соотечественники Ш.А. Алимов, Р.Р. Ашуров, Б.Кадиркулов, Э. Каримов и другие, начали активно заниматься исследованием прямых и обратных задач для уравнений с дробными производными, Это во многом обуславливается тем, что уравнение дробного порядка, в частности уравнения субдиффузии, широко используется в качестве математической модели во множестве прикладных задач физики, биологии, механики, химии и других областях. Дифференциальные уравнения с дробными производными на метрических графах позволяют более точно описывать аномальные процессы и процессы, в которых надо учитывать эффект памяти. Уравнения субдиффузии с дробной производной по времени на метрических графах начали исследоваться недавно. Последние пять лет появились несколько работ Г.Леугеринга, В.Механдарата, М.Мехра. Они в своих работах исследовали разрешимость начально-краевых задач на графе звезде и рассмотрели вопрос граничного управления в таких задачах.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ лаборатории «Дифференциальные уравнения и их приложения» в Институте математики АН РУз, научного гранта F-FA-2021-424 «Решение краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных целого и дробного порядка» в Институте математики АН РУз, зарубежного научно-исследовательского проекта №14-022 RG/MATHS/AS_G; UNESCO FR:324028610 выполненной в НУУз, зарубежного гранта фонда Фольксваген на тему “Nonlinear Evolution Equations and Transport on Metric Graphs Arising from Mesoscopic Physics” выполненной в Университете Ольденбурга, Германия.

Цель исследования состоит в разработки методов исследования и обобщения существующих методов для исследования разрешимости начально-краевых задач и обратных задач по нахождению неизвестных правых частей для уравнений в частных производных на метрических графах.

Задачи исследования:

исследование на однозначную разрешимость начально-краевых задач для уравнения Эйри на метрических графах;

построение интегральных представлений решения задачи Коши для

уравнения типа Эйри на открытом простом метрическом графе с полубесконечными ребрами;

исследования решений начально-краевых задач для уравнения субдиффузии на метрических графах;

построение функций Грина начально-краевых задач для уравнения субдиффузии на метрических графах с равными ребрами;

построение интегральных представлений решений начально-краевых задач для уравнений теплопроводности и Шредингера методом Фокаса на графе-дереве;

исследование глобальную однозначную разрешимость прямых и обратных задач для уравнения субдиффузии в Соболевских пространствах на метрических графах.

Объект исследования. Уравнений в частных производных целого и дробного порядков на метрических графах.

Предмет исследования. Начально-краевые задачи на графах, обратные задачи на определения правой части уравнения.

Методы исследования. При изучении задач использовались метод потенциалов, метод интегральных уравнений, метод Фурье, метод интегральных преобразований, метод априорных оценок, методы функционального анализа и теория операторов.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

доказаны теоремы о корректности задачи Коши для уравнения Эйри на графе-звезде и построена точное решение в виде интегрального представления через начальную функцию и правой части уравнения;

обобщен метод потенциалов для решения начально-краевых задач на метрических графах для уравнения Эйри с дробной производной по времени и доказана однозначная разрешимость первой начально-краевой задачи на графе-звезде.

построены функции Грина первого, второго и смешанного краевых задач для параболического уравнения с дробной производной по времени на графе-звезде и на графе в виде лестницы, а также, методом Фокаса построены интегральные представление краевых задач для уравнений Шредингера и теплопроводности на простых метрических графах;

на конечном связанном метрическом графе доказана однозначная разрешимость двух обратных задач для уравнения псевдо-субдиффузии с дробной производной Хилфера;

доказана глобальная однозначная разрешимость прямой и обратной задачи для уравнения субдиффузии в Соболевских пространствах на графе-звезде.

Практические результаты исследования. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Полученные в диссертационной работе результаты являются важной отправной точкой для исследования волновых и диффузионных процессов в разветвленных структурах, и могут быть полезны для понимания процесса рассеяния в точках разветвления в таких

сложных структурах.

Достоверность результатов исследования. Достоверность полученных результатов и выводов подтверждается строгими математическими доказательствами, основанных на методах теории дифференциальных уравнений, математического анализа, функционального анализа и теории операторов.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость работы выражается в том, что полученные результаты развивают теорию прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений на метрических графах.

Практическая значимость результатов диссертационной работы состоит в том, что они могут быть использованы при математическом моделировании распространения волн в разветвлённых структурах, для расчета коэффициентов пропускания и отражения в точках разветвления, для математического моделирования процесса распространения импульсов в нервных системах.

Внедрение результатов исследования: Полученные результаты по прямым и обратным задачам для дифференциальных уравнений на графах были внедрены в практику по следующим направлениям:

результаты по исследованию начально-краевых задач на метрических графах для дифференциальных уравнений субдиффузии и Эйри с дробной производной по времени были использованы при решении волновых и диффузионных уравнения с дробной производной по времени в рамках зарубежного проекта НИОКТР 122041800029-5 на тему «Краевые задачи и задачи управления для основных и смешанного типов уравнений и их применение к исследованию систем с распределёнными параметрами» (Справка № 24 института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук от 9 апреля 2014 года, Российская федерация). Использование научных результатов дали возможность доказать корректность и найти интегральные представления решений локальных и нелокальных задач для волновых и диффузионных уравнений и систем уравнений с дробной производной по времени;

результаты по глобальной разрешимости прямых и обратных задач уравнениям субдиффузии на звездообразных графах в Соболевских пространствах были использованы при решении нелокальных и обратных задач на определения источника в рамках проекта № AP09259394 «Обратные задачи для эволюционных уравнений с положительными операторами» (Справка №01-06/061 института математики и математического моделирования Комитета науки и высшего образования республики Казахстан от 2 апреля 2024 года). Применение результатов дали возможность получить алгоритмы решения и доказать разрешимость обратных задач для уравнений с дробной производной;

постановки задач и точные решения в виде интегрального представления

задачи Коши для уравнения Эйри на метрических графах были использованы в статьях опубликованных в зарубежных научных журналах при решении граничных задач для уравнений Эйри и Кортевега - де Фриза (Analysis&PDE, 2018, 11 (7), 1625-1652; Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, 2018, 69 (5), 124; Nonlinearity, 2020, 34 (5), 3373-3410). Использование научных результатов позволило получить результаты о разрешимости, устойчивости начально-краевых задач для Эйри и Кортевега - де Фриза.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационного исследования обсуждались на 9 международных и 4 республиканских научных конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 39 научных работ, из них 17 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций (DSc), в том числе 10 опубликованы в зарубежных журналах и 7 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Содержание диссертации состоит из введения, 4 глав, заключения, списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 150 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение диссертационной работы включает в себя обоснования актуальности и востребованности темы диссертации, соответствия исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, обзор научных работ по тематике диссертации проведенными зарубежными и отечественными учёными с отражением степени изученности проблемы, определения целей, задач, объекта и предмета исследования, изложения научной новизны, теоретической и практической значимости полученных результатов, сведения о внедрении основных результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации рассмотрены начально-краевые задачи для уравнений Эйри с целой и дробной производной по времени. При решении поставленных задач метод потенциалов и метод интегралов энергии.

В первом параграфе первой главы дается предварительные результаты, касающихся теории метрических графов и дробных производных.

Во втором параграфе первой главы приведены предварительные результаты касающихся теории потенциалов для уравнения Эйри.

В третьем параграфе первой главы исследована задача Коши для уравнения Эйри на графе звезде Γ с $m + k$ полубесконечными ребрами соединенных в одной точке O , называемой вершиной графа. Ребра графа обозначим через B_j , $j = 1, 2, \dots, k + m$. В каждом ребре B_j определим координату x_j от $-\infty$ до 0 при $j = \overline{1, k}$, от $-\infty$ до 0 при $j = \overline{k + 1, k + m}$. В каждом из ребер координата 0 соответствует вершине графа O (см. Рис.1).

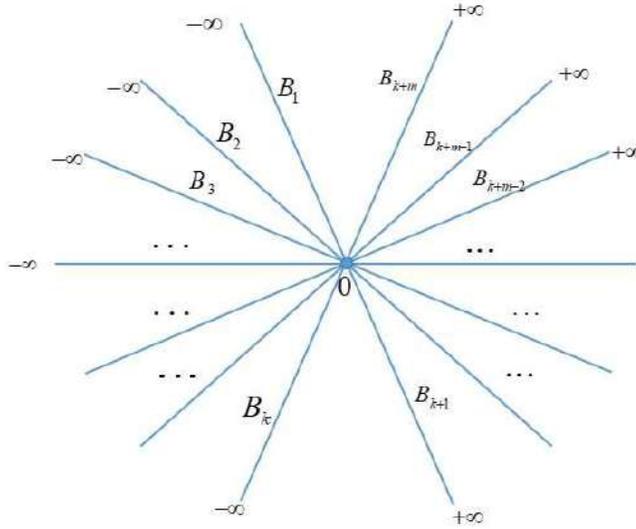


Рисунок 1. Звездообразный граф Γ .

На каждом ребре графа Γ рассмотрим уравнение типа Эйри с дробной производной Капуто по времени

$$\partial_{0,t}^\alpha u_j(x,t) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_j(x,t) = f_j(x,t), 0 < t \leq T, x \in B_j, \quad (1)$$

где $0 < \alpha \leq 1$, с начальными условиями

$$u_j(x,0) = \phi_j(x), x \in \overline{B_j}, j = \overline{1, k+m}. \quad (2)$$

Здесь интеграл и производная Капуто дробного порядков определяется следующим образом:

$$D_{0,t}^{-\alpha} g(t) \equiv I_{0,t}^\alpha g(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{g(\xi)}{(t-\xi)^{1-\alpha}} d\xi, \quad \alpha > 0, t > 0,$$

$$\partial_{0,t}^\alpha g(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{g(\xi) - g(0)}{(t-\xi)^{\alpha-n+1}} d\xi, \quad 0 < \alpha < 1, t > 0,$$

при условии, что интегралы и производные в правых частях этих выражений существуют.

Известно, что для однозначной разрешимости уравнения типа Эйри на интервале помимо начального условия необходимо задать три граничных условия: два на левом конце интервала и одно на правом конце. Следовательно, в случае графа звезды с $m+k$ полубесконечными ребрами нам необходимо задать $k+2m$ условий склеивания на вершине графа. Мы определим эти условия следующим образом:

$$a_j u_j(0,t) = u_1(0,t), 0 \leq t \leq T, j = \overline{2, k+m}, \quad (3)$$

$$u_x^+(0,t) = B u_x^-(0,t), 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{a_j} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_j(x,t) \Big|_{x=0} = \sum_{i=k+1}^{k+m} \frac{1}{a_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_i(x,t) \Big|_{x=0}, 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

где $a_1 \equiv 1$, $a_j \neq 0$, $j = \overline{1, k+m}$, $u^- = (u_1, u_2, \dots, u_k)^T$, $u^+ = (u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_{k+m})^T$ и B – постоянная матрица размерности $m \times k$. Также используем обозначение $u = (u_1, u_2, \dots, u_{k+m})^T$. Кроме этого, мы предполагаем, что функции $\phi_j(x)$, $j = \overline{1, k+m}$, удовлетворяют условию (3) и стремятся к нулю на бесконечностях. Заметим, что условие (5) описывает локальное сохранения потока в точке разветвления графа и обычно называется условием Кирхгоффа.

Следует отметить, что приведенные выше условия склеивания (3) – (5) не являются единственно возможными. Основная мотивация нашего выбора вызвана тем, что они гарантируют единственность решения и, если решения затухают (до нуля) на бесконечности, сохранение нормы (энергии).

Задача 1. Найти регулярное решение уравнению (1) в области $\Gamma \times [0, T]$ из класса

$$Q_1(\Gamma) = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_{k+m}) : u_j \in C^{3,0}(B_j \times (0, T]), \partial_{0,t}^\alpha u_j \in C(B_j \times (0, T]), \\ u_j \in C^{2,0}(\overline{B_j} \times [0, T]), j = \overline{1, k+m}\},$$

удовлетворяющее условиям (2) – (5).

Теорема 1. Пусть симметричная матрица $(E_k - B^T B)$ удовлетворяет условию $\zeta^T \cdot (E_k - B^T B) \cdot \zeta \geq 0$ для любого $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)^T \in R^k$, где E_k – единичная матрица размерности k . Тогда Задача 1 не имеет более одного решения.

Теорема доказывается методом интегралов энергии. Теперь перейдем к вопросу разрешимости задачи.

Фундаментальное решение уравнения (1) определяется следующим образом:

$$G_\alpha^{2\alpha/3}(x, t) = \frac{1}{3t^{1-2\alpha/3}} \begin{cases} \phi(-\frac{\alpha}{3}, \frac{2\alpha}{3}; \frac{x}{t^{\alpha/3}}), & x \leq 0, \\ -2\text{Re}[e^{2\pi i/3} \phi(-\frac{\alpha}{3}, \frac{2\alpha}{3}; e^{2\pi i/3} \frac{x}{t^{\alpha/3}})], & x > 0. \end{cases}$$

Помимо этого, мы определим следующее специальное решение уравнения (1):

$$V_\alpha^{2\alpha/3}(x, t) = \frac{1}{3t^{1-2\alpha/3}} \text{Im}[e^{2\pi i/3} \phi(-\frac{\alpha}{3}, \frac{2\alpha}{3}; e^{2\pi i/3} \frac{x}{t^{\alpha/3}})], \quad x \geq 0.$$

Теорема 2. Пусть симметричная матрица $(E_k - B^T B)$ удовлетворяет условию $\zeta^T \cdot (E_k - B^T B) \cdot \zeta \geq 0$ для любого $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)^T \in R^k$, $f_j(x, t) \in C^{0,1}(B_j \times [0, T])$, $f_j(x, 0) = 0$, $\phi_j(x) \in C(\overline{B_j})$, $j = \overline{1, k+m}$, и эти функции обращаются в ноль при $x \rightarrow \pm\infty$. Тогда единственное решение Задачи 1 имеет вид:

$$u(x, t) = F(x, t) + \int_0^t U(x-0, t-\tau) M^{-1} H(\tau) d\tau,$$

где

$$F_j(x,t) = \int_{B_j} I_{0,t}^{1-\alpha} G_\alpha^{2\alpha/3}(x-\xi,t-0) \phi_j(\xi) d\xi + \int_0^t \int_{B_j} G_\alpha^{2\alpha/3}(x-\xi,t-\tau) f_j(\xi,\tau) d\xi d\tau,$$

$$U(x,t) = \begin{pmatrix} G_\alpha^{2\alpha/3}(x,t)I_k & | & 0_{k \times m} & | & 0_{k \times m} \\ 0_{m \times k} & | & G_\alpha^{2\alpha/3}(x,t)I_m & | & V_\alpha^{2\alpha/3}(x,t)I_m \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1_{(k-1) \times 1} & -diag(a_2, \dots, a_k) & 0_{(k-1) \times m} \\ 1_{m \times 1} & -diag(a_{k+1}, \dots, a_{k+m}) & \frac{\sqrt{3}}{2} diag(a_{k+1}, \dots, a_{k+m}) \\ B & -I_m & \frac{\sqrt{3}}{2} I_m \\ \frac{1}{a_1} \dots \frac{1}{a_k} & \frac{2}{a_{k+1}} \dots \frac{2}{a_{k+m}} & 0_{1 \times m} \end{pmatrix},$$

$$H = 3 \begin{pmatrix} D_{0t}^{\frac{2\alpha}{3}}(a_2 F_2(0,t) - F_1(0,t)) \\ D_{0t}^{\frac{2\alpha}{3}}(a_3 F_3(0,t) - F_1(0,t)) \\ \dots \\ D_{0t}^{\frac{2\alpha}{3}}(a_{k+m} F_{k+m}(0,t) - F_1(0,t)) \\ D_{0t}^{\frac{\alpha}{3}}(F_x^+(0,t) - B F_x^-(0,t)) \\ \sum_{i=k+1}^{k+m} \frac{1}{a_i} F_{i,xx}(0,t) - \sum_{j=1}^k \frac{1}{a_j} F_{j,xx}(0,t) \end{pmatrix}.$$

В предельном случае $\alpha = 1$ получены аналогичные результаты.

В четвертом параграфе первой главы исследована начально-краевая задача для уравнения Эйри на графе звезде с конечными ребрами.

Пусть граф $\Gamma_1 = \Gamma^- \cup \Gamma^+$ имеет k входящих и m исходящих ребер. Ребра графа обозначим через B_j , $j = \overline{1, k+m}$ (Рис. 2). Во входящих ребрах $B_j \in \Gamma^-$ координаты определяем от L_j ($L_j < 0$, $j = \overline{1, k}$) до 0, а в исходящих ребрах $B_j \in \Gamma^+$ от 0 до L_i ($L_i > 0$, $i = \overline{k+1, k+m}$).

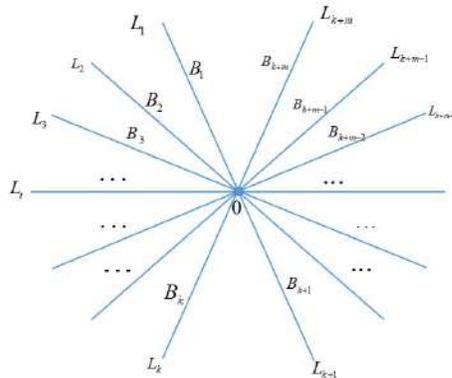


Рисунок 2. Звездообразный граф Γ_1 .

Пусть $f = (f_1, f_2, \dots, f_{k+m})^T$, $u^- = (u_1, u_2, \dots, u_k)^T$, $u^+ = (u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_{k+m})^T$ и $u = \begin{pmatrix} u^+ \\ u^- \end{pmatrix}$. На каждом ребре графа Γ_1 рассмотрим уравнение Эйри с дробной производной по времени

$$\partial_{0,t}^\alpha u_j(x,t) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_j(x,t) = f(x,t), \quad 0 < t \leq T, x \in B_j, \quad (6)$$

с начальными условиями

$$u_j(x,0) = u_{0j}(x), \quad x \in \overline{B_j}, \quad j = \overline{1, k+m}. \quad (7)$$

На внутренней вершине графа потребуем следующие условия согласования

$$Au(0,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

$$u_x^+(0,t) = Bu_x^-(0,t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (9)$$

где A – постоянная матрица в виде

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_{k+m-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{k+m} \end{pmatrix}$$

и B – постоянная матрица размерности $m \times k$, $a_1 = 1$, $a_j \neq 0$ для всех $j = \overline{2, k+m}$.

Кроме этого, в вершине графа потребуем выполнения условия Кирхгоффа

$$C^- \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^-(x,t) \Big|_{x=0} = C^+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^+(x,t) \Big|_{x=0}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (10)$$

где $C^- = (\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_k})$, $C^+ = (\frac{1}{a_{k+1}}, \dots, \frac{1}{a_{k+m}})$.

На граничных точках используем условия

$$u(x,t) \Big|_{\partial\Gamma} = \varphi(t), \quad \frac{\partial}{\partial x} u^-(x,t) \Big|_{\partial\Gamma_1} = \phi(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (11)$$

где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k+m})^T$, $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k)^T$ заданные функции.

Пусть

$$Q_2(\Gamma) = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_{k+m}) : u_j(x,t) \in C^{3,0}(B_j \times (0,T]), D_{0,t}^\alpha u_j \in C(B_j \times (0,T]),$$

$$u_j \in C^{1,0}(\overline{B_j} \times [0,T]), \quad j = \overline{1, k},$$

$$u_{j,x} \in C((B_j \cup \{0\}) \times [0,T]), \quad j = \overline{k+1, k+m},$$

$$u_{j,xx} \in C((B_j \cup \{0\}) \times [0,T]), \quad j = \overline{1, k+m}\}.$$

Задача 2. Найти регулярное решение уравнения (6) в области $\Gamma_1 \times [0, T]$ из класса $Q_2(\Gamma)$, удовлетворяющее условиям (7) – (11).

Теорема 3. Пусть симметричная матрица $(E_k - B^T B)$ удовлетворяет условию $\zeta^T (E_k - B^T B) \zeta \geq 0$ для любого $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)^T \in R^k$. Тогда, если Задача 2 имеет решения, то она единственно.

Теорема доказывается методом интегралов энергии.

При доказательстве существования решения использован метод потенциалов. Удовлетворяя граничным условиям и условиям на внутренней вершине, графа получена система интегральных уравнений Вольтерра второго рода и показана разрешимость этой системы.

Теорема 4. Пусть симметричная матрица $(E_k - B^T B)$ удовлетворяет условию $\zeta^T (E_k - B^T B) \zeta \geq 0$ для любого $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k)^T \in R^k$, $u_j^0(x) \in C(\overline{B_j})$, $f_j(x, t) \in C^{0,1}(\overline{b_j} \times [0, T])$, $f_j(x, 0) = 0$, $j = \overline{1, k+m}$, функции $\varphi(t)$ и $\phi(t)$ непрерывно дифференцируемые функции на $[0, T]$. Тогда Задача 2 имеет единственное решение.

Во второй главе диссертации рассмотрены начально-краевые задачи для диффузионно-волновых уравнений с дробной производной по времени. В первом параграфе построены функции Грина начально-краевых задач для уравнения диффузии с дробной производной по времени на графах с равными ребрами.

Пусть $\Gamma = (E, V)$ - конечный связанный метрический граф с равными ребрами. Здесь $E = \{b_k\}_{k=1}^N$ - множество ребер, V - множество вершин. Пусть $u: \Gamma \rightarrow R$ функция на графе, $u|_{b_k} = u_k$. Нам удобно будет использовать обозначение $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$. Определим оператор Лапласа на графе

$$\Delta_E u = \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 u_N}{\partial x_N^2} \right).$$

Дробная производная Римана-Лиувилля определяется следующим образом

$$D_{a,t}^\alpha g(t) = \frac{\text{sign}^n(t-a)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_a^t \frac{g(\xi)}{|t-\xi|^{\alpha-n+1}} d\xi \right), \quad n-1 < \alpha < n, n \in N,$$

при условии, что интеграл и производная в правой части этого равенства существует.

На графе Γ рассмотрим уравнение субдиффузии

$$D_{0,t}^\alpha u(x, t) - \Delta_E u(x, t) = f(x, t), \quad 0 < t \leq T, \quad (12)$$

где $0 < \alpha < 1$, с начальным условием

$$\lim_{t \rightarrow 0} I_{0,t}^{1-\alpha} u(x, t) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma. \quad (13)$$

В точке соединения ребер требуем выполнения условия непрерывности $u \in C(\Gamma)$ и условия Кирхгоффа:

$$\Delta_v u = 0, v \in V \setminus \partial\Gamma, 0 < t \leq T, \quad (14)$$

где $\Delta_v f := \sum_{b_k \sim v} \frac{1}{w_k} \sigma_{b_k, v} \frac{\partial f_k(x_k)}{\partial x_k} \Big|_v$ - оператор Неймана-Кирхгоффа.

На граничных точках используем граничные условия Дирихле

$$u(x, t) \Big|_{\partial\Gamma} = \psi(x, t), x \in \partial\Gamma, 0 < t \leq T \quad (15)$$

или смешанные условия в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) \Big|_{D_1} &= \psi(x, t), x \in D_1, 0 < t \leq T, \\ u_x(x, t) \Big|_{D_2} &= \phi(x, t), x \in D_2, 0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (16)$$

где $D_1 \cup D_2 = \partial\Gamma, D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

Задача 3. Найти решение уравнения (12) из класса

$$\begin{aligned} Q_3(\Gamma) &= \{u = (u_1, \dots, u_m) : D_{0,t}^\alpha u, \Delta_E u \in C(\Gamma_0 \times (0, T)), \\ t^{1-\alpha} u &\in C(\Gamma \times [0, T]), t^{1-\alpha} u_{k,x} \in C(\bar{b}_k \times [0, T]), k = \overline{1, N}\}, \end{aligned}$$

удовлетворяющие условиям (13) – (15).

Задача 4. Найти решения уравнения (12) из класса

$$\begin{aligned} Q_4(\Gamma) &= \{u = (u_1, \dots, u_m) : \Delta_E u, D_{0,t}^\alpha u \in C(\Gamma_{\text{int}} \times (0, T)), \\ t^{1-\alpha} u &\in C(\Gamma \times [0, T]), t^{1-\alpha} u_{k,x} \in C(\bar{b}_k \times [0, T]), k = \overline{1, N}\} \end{aligned}$$

удовлетворяющие условиям (13) – (14) и (16).

Выше сформулированные задачи мы будем рассматривать в двух графах: 1) звездообразном графе с равными ребрами; 2) графе в виде лестницы.

Сначала построим функцию Грина на звездообразном графе с равными ребрами. Пусть Γ звездообразный граф, который состоит из m конечных ребер, с равными длинами L , соединенных в одной точке O . Координату на каждом ребре определим изометрическим отображением этого ребра на отрезок $[0, L]$. При этом, координата точки O на каждом ребре равна нулю. В этом случае граничные условия (2.1.4) записываются в виде $u_j(L, t) = \psi_j(t), j = \overline{1, m}$.

Теорема 5. Пусть $\varphi(x) \in C(\Gamma), t^{1-\alpha} \psi_j(t) \in C[0, T], (j = \overline{1, m}, T > 0)$ и $t^{1-\alpha} f(x, t) \in C^{0,1}(\Gamma \times [0, T])$. Кроме того, выполнено условие $\Gamma(\alpha) \varphi_i(L) = \lim_{t \rightarrow +0} t^{1-\alpha} \phi_i(t), i = \overline{1, m}$. Тогда задача 3 имеет единственное решение в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) &= - \int_0^t (G_\xi(x, t; L, \tau) u(L, \tau) +) d\tau - \int_0^L \varphi(\xi) G(x, t; \xi, 0) d\xi - \\ &\quad - \int_0^t \int_0^L G(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \end{aligned}$$

где $u = (u_1, \dots, u_m)^T, f = (f_1, \dots, f_m)^T$ и $G(x, t; \xi, \tau)$ определяется как

$$G = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n M^n (\Gamma(x - \xi + 2nL, t - \tau) + M\Gamma(x + \xi + 2nL, t - \tau)),$$

$$\Gamma(s, t) = \frac{1}{2} t^{\alpha/2-1} e_{1, \alpha/2}^{1, \alpha/2} \left(-\frac{|s|}{t^{\alpha/2}} \right), \quad M = SK^{-1},$$

$$K = \begin{pmatrix} w_1 & w_1 & \dots & w_1 & 1 \\ -w_2 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -w_3 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -w_m & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -w_1 & -w_1 & \dots & -w_1 & 1 \\ w_2 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & w_3 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & w_m & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь приведем функцию Грина задачи 4 в случае звездообразного графа Γ . Пусть D_1 состоит из граничных вершин первых k ребер ($k < m$).

Теорема 6. Пусть $\varphi(x) \in C(\Gamma)$, $t^{1-\alpha} \psi_i(t) \in C[0, T], i = \overline{1, k}$, $t^{1-\alpha} \phi_j(t) \in C[0, T], j = \overline{k+1, m}$ и $t^{1-\alpha} f(x, t) \in C^{0,1}(\Gamma \times [0, T])$. Тогда Задача 4 имеет единственное решение в виде

$$u(x, t) = \int_0^t G_{1\xi}^{(N)} \left(x, t; L, \tau \right) \frac{\partial u_N(\xi, \tau)}{\partial} \Big|_{\xi=L} - G_{1\xi}^{(D)}(x, L; t, \tau) u_D(L, \tau) \Big) d\tau - \int_0^L \varphi(\xi) G_1(x, t; \xi, \tau) d\xi - \int_0^t \int_0^L G_1(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

где

$$G_1(x, t; \xi, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi^n M^n (\Gamma(x - \xi + 2nL, t - \tau) + M\Gamma(x + \xi + 2nL, t - \tau)),$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} -E_k & 0 \\ 0 & E_{m-k} \end{pmatrix}, \quad u_D = (u_1, \dots, u_k, 0, \dots, 0)^T, \quad u_N = (0, \dots, 0, u_{k+1}, \dots, u_m)^T,$$

$$G_1^{(D)} = \begin{pmatrix} G_1^{11} & G_1^{12} & \dots & G_1^{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_1^{k1} & G_1^{k2} & \dots & G_1^{km} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad G_1^{(N)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ G_1^{(k+1)1} & G_1^{(k+1)2} & \dots & G_1^{(k+1)m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_1^{m1} & G_1^{m2} & \dots & G_1^{mm} \end{pmatrix},$$

Теперь рассмотрим случай графа лестничного типа с $3m - 1$ равными ребрами. Определим координаты на ребрах графа через изометрическое отображение каждого ребра на интервал от 0 до L . Ребра обозначим через B_k , $k = \overline{1, 3m - 1}$ (см. Рис. 2).

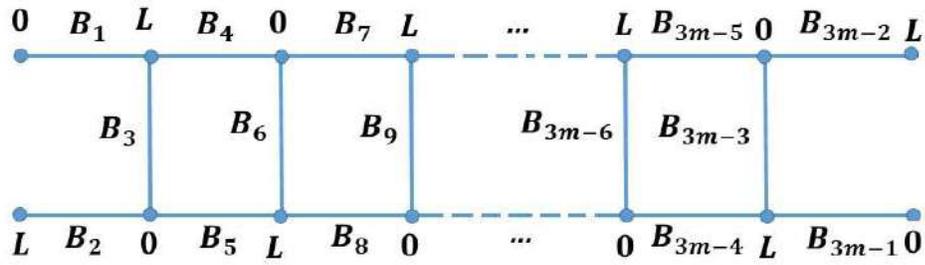


Рис. 2. Граф – лестница с $3m - 1$ ребрами (m - нечетное число).

Для начало рассмотрим случай нечетного m . Граничные условия перепишем в виде

$$\begin{aligned} u_1(0,t) &= \psi_1(t), \quad u_{3m-1}(0,t) = \psi_2(t), \\ u_2(L,t) &= \psi_3(t), \quad u_{3m-2}(L,t) = \psi_4(t), \quad 0 < t \leq T. \end{aligned}$$

Теорема 7. Пусть Γ описанный выше граф лестничного типа с $3m-1$ ребрами с четным $t^{1-\alpha}\psi_i(t) \in C[0,T]$, $i = \overline{1,4}$, $\varphi_j(x) \in C[0,L]$, $j = \overline{1,3m-1}$ и $t^{1-\alpha}f(x,t) \in C^{0,1}(\Gamma \times [0,T])$. Тогда Задача 3 имеет решение в виде

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t G_\xi(x,t;0,\tau)U^{1,3m-1}(0,\tau)d\tau - \int_0^t G_\xi(x,t;L,\tau)U^{2,3m-2}(L,\tau)d\tau - \\ &- \int_0^L \varphi(\xi)G(x,t;\xi,\tau)d\xi - \int_0^t \int_0^L G(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \end{aligned}$$

где $U^{i,j} = (0,0,\dots,0,u_i,0,\dots,0,u_j,0,\dots,0)^T$, $f = (f_1,\dots,f_{3m-1})^T$,

$$G = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(M^n \Gamma(x - \xi + 2nL, t - \tau) + (DC^{-1})^n \Gamma(x + \xi + 2nL, t - \tau) \right),$$

$$M = DC^{-1}TQP^{-1}T^{-1},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{D}_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{D}_{(m-3)/2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D}_j = \begin{pmatrix} w_{6j+2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -w_{6j+3} & w_{6j+3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{6j+4} & 0 & 1 \\ 0 & -w_{6j+5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w_{6j+6} & w_{6j+6} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -w_{6j+7} & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{C}_{(m-3)/2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_j = \begin{pmatrix} -w_{6j+2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ w_{6j+3} & -w_{6j+3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w_{6j+4} & 0 & 1 \\ 0 & w_{6j+5} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{6j+6} & -w_{6j+6} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_{6j+7} & 1 \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{P}_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{P}_{(m-3)/2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{P}_j = \begin{pmatrix} w_{6j+1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -w_{6j+3} & w_{6j+3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -w_{6j+4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{6j+5} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -w_{6j+6} & w_{6j+6} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -w_{6j+8} & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{Q}_{(m-3)/2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{Q}_j = \begin{pmatrix} -w_{6j+1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ w_{6j+3} & -w_{6j+3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_{6j+4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w_{6j+5} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & w_{6j+6} & -w_{6j+6} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_{6j+8} & 1 \end{pmatrix}$$

и матрица T размерности $(3m-1) \times (3m-1)$ получен перестановкой пары строк под номерами $6j+1$ и $6j+2$ в единичной матрицы для каждого $j = 0, \overline{(m-3)/2}$.

Аналогично построена функция Грина задачи в случае графа-лестницы с четным m .

Во втором параграфе второй главы рассматривается однозначная разрешимость двух обратных задач для уравнения псевдо-субдиффузии с дробной производной Хилфера по времени. Введем некоторые вспомогательные понятия.

Рассмотрим весовые пространства непрерывных функций

$$C_\gamma[a, b] = \{f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R} : (t-a)^\gamma f(t) \in C[a, b]\}, 0 \leq \gamma < 1,$$

и

$$C_\gamma^n[a, b] = \{f \in C^{n-1}[a, b] : f^{(n)} \in C_\gamma, n \in \mathbb{N}\}, C_\gamma^0[a, b] = C_\gamma[a, b],$$

с нормами

$$\|f\|_{C_\gamma} = \|(t-a)^\gamma f(t)\|_C \quad \text{и} \quad \|f\|_{C_\gamma^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \|f^{(k)}\|_C + \|f^{(n)}\|_{C_\gamma}.$$

Эти пространства удовлетворяют следующим свойствам.

а) $C_0^0[a, b] = C[a, b]$; б) $C_\gamma^n(a, b) \subset AC^n[a, b]$;

в) $C_{\gamma_1}[a, b] \subset C_{\gamma_2}[a, b]$, $0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 < 1$.

Дробная производная Хильфера $D_{0+}^{\alpha,\mu}$ порядка α и типа μ по t определяется формулой

$$(D_{0,t}^{\alpha,\mu} u)(t) = I_{0,t}^{\mu(l-\alpha)} \frac{d^l}{dt^l} (I_{0,t}^{(1-\mu)(l-\alpha)} u)(t), \quad l-1 < \alpha < l, \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad l \in N,$$

при условии, что существуют интегралы и производная в правой части равенства.

Производную $D_{0+}^{\alpha,\mu}$ можно рассматривать как интерполяцию между производными Римана-Лиувилля и Капуто: $D_{0,t}^{\alpha,\mu} = \begin{cases} D_{0,t}^{\alpha}, & \mu = 0, \\ \partial_{0,t}^{\alpha}, & \mu = 1. \end{cases}$

Пусть $\Gamma = (V, E)$ – связный конечный метрический граф, где $V = \{\nu_k\}_1^n$ – множество вершин, $E = \{b_k\}_{k=1}^j$ – множество ребер (интервалов) с конечными точками в V . Пусть $\{q_1, q_2, \dots, q_{m_1}\} = \partial\Gamma \subset V$ – множество граничных вершин графа. Определим координаты x_k на каждом ребре b_k графа, используя изометрическое отображение этих ребер на интервалы $(0, L_k)$, $k = 1, 2, \dots, j$.

На каждом ребре определенного выше графа Γ рассмотрим дробное дифференциальное уравнение

$$D_{0,t}^{\alpha,\mu} u^{(k)}(x,t) = au_{xx}^{(k)}(x,t) + bD_{0,t}^{\alpha,\mu} u_{xx}^{(k)}(x,t) + cu^{(k)}(x,t) + f^{(k)}(x,t), \quad (17)$$

где $x \in B_k$, $0 < t < T$, $k = \overline{1, j}$, $D_{0,t}^{\alpha,\mu}$ – дробный дифференциальный оператор Хильфера, $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \mu \leq 1$, $a > 0, b > 0, c \leq 0$ – константы.

Для дальнейшего рассмотрения положим $u = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(j)})^T$, $f = (f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(j)})^T$ как указано выше для функций, определенных на графе.

Теперь сформулируем первую обратную задачу на восстановление правой части уравнения. Пусть $f^{(k)}(x,t) = f^{(k)}(x)g(t)$. Здесь $f^{(k)}(x)$ неизвестны, $g(t)$ заданы функции, $g(t) > 0$, $0 \leq t \leq T$.

Задача 5. Найти функции $\{u^{(k)}(x,t), f^{(k)}(x)\}$, для которых выполняется уравнение (17) и выполняются следующие свойства:

$$1) t^{1-\gamma} u^{(k)}(x,t) \in C_{x,t}^{1,\gamma}([0, L_k] \times [0, T]),$$

$$D_{0,t}^{\alpha,\mu} u_{xx}^{(k)}(x,t), D_{0,t}^{\alpha,\mu} u^{(k)}(x,t) \in C((0, L_k) \times (0, T)),$$

$$t^{1-\gamma} u_{xx}^{(k)}(x,t) \in C((0, L_k) \times [0, T]), \gamma = \alpha + \mu - \alpha\mu, \quad k = \overline{1, j};$$

2) в точках разветвления (т. е. во внутренних вершинах) графа решение должно удовлетворять следующим условиям

(А) *Условия непрерывности:* значения во внутренней вершине ν всех функций $u^{(k)}(x,t)$, для которых $b_k \sim \nu$ одинаковы и

(В) *Локальные условия сохранения потока в точках ветвления:* сумма односторонних производных в каждой вершине ν всех функций $u^{(k)}(x,t)$, для которых $b_k \sim \nu$, равна нулю:

$$\sum_{b \sim \nu} \sigma_{b,\nu} u_x^{(k)}(x,t)|_{\nu} = 0, \quad \nu \in V \setminus \partial\Gamma, t \in (0, T] \quad (18)$$

3) граничным условиям

$$u_x^{(k)}(x,t)|_{q_k} = 0, q_k \in \partial\Gamma, t \in (0, T], k = \overline{1, m_1}; \quad (19)$$

4) начальным условиям

$$I_{0t}^{1-\gamma} u^{(k)}(x,t)|_{t=0} = \varphi^{(k)}(x), x \in B_k, k = \overline{1, j}, \quad (20)$$

и условию преопределения

$$u^{(k)}(x, T) = \psi_k(x), x \in B_k, k = \overline{1, j}, \quad (21)$$

где $\psi_k(x)$, $\varphi_k(x)$ — достаточно гладкие заданные функции.

Теорема 8. Пусть функции $g(t)$ и $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1. $g(t) \in C[0, T]$, $0 < m \leq g(t) \leq M < +\infty$, $m, M = const$;

2. $\varphi_k(x), \psi_k(x) \in C^2[0, l_k]$, $\varphi_k'''(x), \psi_k'''(x)$ являются абсолютными интегрируемыми функциями в $(0, l_k)$;

3. условия (18)-(19) справедливы для функций $\varphi_k(x)$ и условие (18) справедливо для функций $\varphi_k''(x)$;

4. условия (18)-(19) справедливы для функций $\psi_k(x)$, а условие (18) справедливо для функций $\psi_k''(x)$.

Тогда Задача 5 имеет единственное решение.

Сформулируем вторую обратную задачу.

Задача 6. Найти пару функций $(u^{(k)}(x,t), g(t))$ в области $B_k \times (0, T)$, которая удовлетворяет уравнению (17), условию непрерывности на вершинах и условиям (18)-(20). Кроме того, удовлетворяет перезаданному условию интегрального типа

$$\int_{\Gamma} u(x,t) dx = \Phi(t), \quad t \in [0, T].$$

Здесь $\Phi(t)$ и $\varphi_k(x)$ — достаточно гладкие заданные функции.

Теорема 9. Пусть функции $\varphi^{(k)}(x)$, $f^{(k)}(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1. $f^{(k)}(x) \in C[0, l_k]$, $\frac{\partial}{\partial x} f^{(k)}(x)$ — абсолютно интегрируемые функции на $(0, l_k)$; 2. $\int_{\Gamma} f(x) dx \neq 0$; 3. условия 1) - 3) теоремы 8 выполнены.

Тогда задача 6 имеет единственное решение.

В третьем параграфе второй главы рассматривается начальная задача для уравнения субдиффузии с различными порядками дробных производных на открытом метрическом звездообразном графе с полубесконечными ребрами.

Мы рассматриваем звездообразный граф Γ , состоящий из n ребер B_1, B_2, \dots, B_n с общим концом O . Координата x_j в ребре B_j определяется

изометрическим отображением этого ребра на интервалы $(0, +\infty)$. В каждом из ребер к вершины O соответствует координата $x_j = 0$. Далее в тексте мы будем использовать X вместо x_j . На каждом ребре графа Γ рассмотрим уравнение субдиффузии

$$D_{0,t}^{\alpha_k} u_k = u_{k,xx} + f_k(x,t), \quad x > 0, 0 < t \leq T, \quad (22)$$

с $0 < \alpha_k < 2, k = 1, 2, \dots, n$. Мы определяем целое число m следующими соотношениями $m-1 < \alpha_k \leq m, m \in \{1, 2\}$.

Начальные условия определяются как

$$D_{0,t}^{\alpha_k - l} u_k(x, +0) = \varphi_{k,l}(x), \quad 0 \leq x < +\infty, l = \overline{1, m}, k = \overline{1, n}. \quad (23)$$

В точке ветвления (вершине) графа необходимо выполнения следующих условий склейки (Кирхгофа)

$$D_{0,t}^{\alpha_i - m} u_i(0, t) = D_{0,t}^{\alpha_j - m} u_j(0, t), \quad i, j = \overline{1, n}, i \neq j, \quad (24)$$

$$\sum_{k=1}^n w_k D_{0,t}^{\alpha_k - m} u_{k,x}(+0, t) = \lambda D_{0,t}^{\alpha_1 - m} u_1(0, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (25)$$

где $w_1 = 1, w_k = \text{const} > 0, k = 2, 3, \dots, n, \lambda = \text{const} \geq 0$.

Условие (25) называется условием типа δ , а в случае $\lambda = 0$ это условие называется условием сохранения локального потока (Кирхгоффа) в точке ветвления.

Функция $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ называется регулярным решением задачи (22) – (25), если

- 1) $D_{0,t}^{\alpha_k} u_k(x, t), u_{k,xx} \in C((0, +\infty) \times (0, T])$,
- $D_{0,t}^{\alpha_k - l} u_k, D_{0,t}^{\alpha_k - l} u_{k,x} \in C([0, +\infty) \times [0, T]),, 1 \leq l \leq m, k = 1, 2, \dots, n$;
- 2) Уравнения (22) выполняются при $(x, t) \in (0, +\infty) \times (0, T]$;
- 3) Начальные условия (23) и вершинные условия (24), (25) выполнены.

Положим

$$V_\sigma(\Gamma) = \left\{ (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)) : \lim_{x \rightarrow +\infty} D_{0,t}^{\alpha_k - l} u_k \cdot \exp(-\sigma x) = 0, 0 < t \leq T, l = \overline{1, m}, k = \overline{1, n} \right\}.$$

Теорема 10. *Начально-краевая задача (22) – (25) не имеет более одного регулярного решения в $V_{\sigma_0}(\Gamma)$ при любом $\sigma_0 > 0$.*

Теорема 11. *Пусть $t^{1-\alpha_k} f_k(x, t), t^{1-\beta_k} f_{k,t}(x, t) \in C(\overline{B}_k \times [0, T])$, $\varphi_{k,l}(x) \in C[0, +\infty)$, функции $f_k(x, t), k = \overline{1, n}$, непрерывны по Гельдеру относительно X на $[0, +\infty)$ для каждого $t > 0$,*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_{k,l}(x) \exp\left(-\rho_k x^{\frac{2}{2-\alpha_k}}\right) = 0, l = \overline{1, m}$$

$$и \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} t^{1-\alpha_k} f_k(x, t) \exp\left(-\rho_k x^{\frac{2}{2-\alpha_k}}\right) = 0$$

равномерно на $[0, T]$, где $\rho_k < (1 - \beta_k) \left(\frac{\beta_k}{T} \right)^{\frac{\beta_k}{1 - \beta_k}}$.

При этом пусть выполняются следующие условия совместимости:

$\varphi_{k,l}(0) = \varphi_{j,l}(0), k, j = \overline{1, n}, k \neq j, \sum_{k=1}^n \varphi'_{k,l}(0) = \lambda \varphi_{1,l}(0), l = \overline{1, m}$. Тогда задача (22)–(25) имеет регулярное решение.

Понятно, что в этом случае метод разделения переменных не применима. При доказательстве теоремы существования использована метод потенциалов и решение задачи сведена к исследованию обобщенного интегрального уравнения Абеля.

В третьей главе приведен метод унифицированного преобразования (или метод Фокаса) для решения начально-краевых задач на метрических графах. С помощью этого метода начально-краевая задача на графе сводится к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных значений решения и её производной на вершинах графа. **Первый параграф третьей главы** носит вспомогательный характер.

Во втором параграфе третьей главы исследованы начально-краевые задачи для уравнения Шредингера на графе-звезде.

Мы рассматриваем метрический граф Γ_3 , который получается соединением n конечных, B_1, B_2, \dots, B_n и m полубесконечных, $B_{n+1}, B_{n+2}, \dots, B_{n+m}$ ребер в одной точке, называемой вершиной графа. Как и в предыдущих случаях, определим координаты на ребрах $B_j \sim (0, L_j), j = \overline{1, n}$, и $B_r \sim (0, +\infty), r = \overline{n+1, n+m}$.

Рассмотрим уравнения Шредингера на каждом ребре графа

$$i q_t^{(j)}(x, t) = \sigma q_{xx}^{(j)}(x, t), x \in B_j, t > 0, j = \overline{1, n+m}, \quad (26)$$

с начальными условиями

$$q^{(j)}(x, 0) = q_0^{(j)}(x), x \in B_j, j = \overline{1, n+m}, \quad (27)$$

и граничными условиями

$$q^{(j)}(L_j, t) = h_0^{(j)}(t), t \geq 0, j = \overline{1, n}. \quad (28)$$

В вершине графа решение удовлетворяет следующим условиям склеивания

$$q_x^{(i)}(0, t) = q_x^{(j)}(0, t), t \geq 0, i, j = \overline{1, n+m}, \quad (29)$$

$$\sum_{j=1}^{n+m} \delta_j^2 q_x^{(j)}(0, t) = 0, t \geq 0. \quad (30)$$

Предполагаем, что граничные данные достаточно гладкие, и абсолютно интегрируемые, начальные данные непрерывны и абсолютно интегрируемы вместе с производными до второго порядка, включительно, в своих областях определения.

Пусть $D^{(2)} = \{k \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(-ik^2) < 0, \operatorname{Im}(k) > 0\}$,

$D^{(4)} = \{k \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(-ik^2) < 0, \operatorname{Im}(k) < 0\}$.

Теорема 12. *Решение начально-краевой задачи (26) – (30) на Γ_3 имеет вид*

$$q^{(j)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt} \hat{q}_0^{(j)}(k) dk -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^{(4)}} e^{ikx-ikL_j-wt} \frac{\hat{q}_0^{(j)}(k) - \hat{q}_0^{(j)}(-k) + 2e^{-ikL_j} k \sigma \tilde{h}_0^{(j)}(w, t)}{B_j} dk +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^{(2)}} e^{ikx-wt} \frac{e^{-ikL_j} \hat{q}_0^{(j)}(-k) - e^{ikL_j} \hat{q}_0^{(j)}(k) - 2k \sigma \tilde{h}_0^{(j)}(w, t) + 2e^{-ikL_j} i \sigma \tilde{g}_0(w, t)}{B_j} dk,$$

$$q^{(r)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt} \hat{q}_0^{(j)}(k) dk + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^{(2)}} e^{ikx-wt} \hat{q}_0^{(j)}(-k) dk +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\partial D^{(2)}} e^{ikx-wt} i \sigma \tilde{g}_1(w, t) dk, \quad j = \overline{1, n}, \quad r = \overline{n+1, n+m}$$

где $\tilde{h}_0^{(j)}(w, t) = \int_0^t e^{ws} h_0^{(j)}(s) ds, \quad j = \overline{1, n}, \quad \hat{q}_0^{(j)}(k) = \int_0^{L_j} e^{-ikx} q_0^{(j)}(x) dx, \quad j = \overline{1, n+m},$

$w = -i\sigma k^2,$

$$i\sigma \tilde{g}_1(w, t) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \delta_j^2 \frac{B_j}{A_j} + \sum_{r=n+1}^{n+m} \delta_r^2}.$$

$$\left[\sum_{j=1}^n \frac{\delta_j^2}{A_j} \left[e^{ikL_j} \hat{q}_0^{(j)}(k) - e^{-ikL_j} \hat{q}_0^{(j)}(-k) + 2k \sigma h_0^{(j)}(w, t) \right] + \sum_{r=n+1}^{n+m} \delta_r^2 \hat{q}_0^{(r)}(k) \right],$$

$$A_j = e^{ikL_j} - e^{-ikL_j}, \quad B_j = e^{ikL_j} + e^{-ikL_j}, \quad (j = \overline{1, n}).$$

В третьем параграфе третьей главы приведен метод построения решений начально-краевых задач на метрических графах более общего вида, таких, как граф, состоящий из треугольника с дополнительными прикрепленными ребрами на каждой вершине, графы в виде дерева.

В четвертой главе исследована разрешимость начально-краевых задач для уравнения субдиффузии на пространствах Соболева. При этом, введены понятия соболевских пространств дробного порядка. **В первом параграфе**

четвертой главы приведены вспомогательный понятия о функциональных пространствах в метрических графах. Пусть Γ звездообразный граф.

Пусть $G_\tau = \{(x,t) : x \in \Gamma, t \in (0, \tau]\}, 0 \leq \tau \leq T$. $W_2^{2,\alpha}(G_\tau)$ является гильбертовым пространством и содержит все элементы $L_2(G_\tau)$, которые имеют обобщенные производные $\partial_{0,t}^\alpha u$, u_x и u_{xx} из $L_2(G_\tau)$. Скалярное произведение в нем определяется равенством $(u, v)_{W_2^{2,\alpha}(G_\tau)} = \int_{G_\tau} (uv + \partial_{0,t}^\alpha u \partial_{0,t}^\alpha v + u_x v_x + u_{xx} v_{xx}) d\Gamma dt$,

и норма обозначается: $\|\cdot\|_{W_2^{2,\alpha}(G_\tau)}$.

Положим $W_{2,0}^{2,\alpha}(G_\tau) = \{u \in W_2^{2,\alpha}(G_\tau) : u|_{\partial\Gamma} = 0\}$.

Во втором параграфе четвертой главы исследована на разрешимость начально-краевая задача для уравнения субдиффузии на метрическом графе в Соболевском классе функций $W_{2,0}^{2,\alpha}(G_\tau)$.

Рассмотрим уравнение с дробной производной по времени

$$\partial_{0,t}^\alpha u - u_{xx} = h(x,t), \quad x \in \Gamma_{\text{int}}, t \in (0, T), \quad (31)$$

где $0 < \alpha < 1$, с начальным условием

$$u(x, 0) = 0, \quad (32)$$

и с граничным условием

$$u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (33)$$

На внутренней вершине v графа потребуем выполнения условий непрерывности и Кирхгоффа:

$$u \in C(\Gamma), \quad \Delta_v u = 0. \quad (34)$$

Используя функциональный метод предложенной Ладыженской мы получили следующий результат

Теорема 13. Пусть $h \in L_2(G_\tau)$. Тогда задача (31) – (34) имеет единственное решение в пространстве $W_{2,0}^{2,\alpha}(G_\tau)$. Кроме этого, имеет место следующая оценка:

$$\int_0^t \int_\Gamma ((\partial_{0,t}^\alpha w)^2 + w_{xx}^2) d\Gamma d\tau + \frac{1}{T^\alpha \Gamma (1-\alpha)} \int_0^t \int_\Gamma w_x^2 d\Gamma d\tau \leq \int_0^t \int_\Gamma h^2 d\Gamma d\tau.$$

В третьем параграфе четвертой главы исследуется обратная задача на определения пары функций $\{u, f\} \in W_{2,0}^{2,\alpha}(G_\tau) \times L_2(0, T)$, удовлетворяющих уравнению с дробной производной по времени

$$\partial_{0,t}^\alpha u - u_{xx} = f(t)g(x,t) + h(x,t), \quad x \in \Gamma_{\text{int}}, t \in (0, T), \quad (35)$$

где $0 < \alpha < 1$, с начальными и граничными условиями (32)–(34).

Кроме этого, мы задаем интегральное условие переопределения

$$\sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} v_j(x) u_j(x,t) dx = E(t). \quad (36)$$

Допустим, выполняются следующие условия

$$(H1) : g \in L_\infty(0, T, L_2(\Gamma)), v_j \in H_{Dir}^1(\Gamma), E \in H_\alpha(0, T), |g^*| \geq p > 0.$$

Теорема 14. Пусть $h(x,t) \in L_2(G_T)$, условия (H1) выполнены. Тогда обратная задача (35), (32) – (34), (36) имеет единственное решение $\{u, f\} \in W_{2,0}^{2,\alpha}(G_T) \times L_2(0,T)$. Кроме того, имеет место следующая оценка

$$\|f\|_{L_2(0,T)} \leq C_2 \|E\|_{H_a},$$

где $C_2 = \text{const} > 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе исследованы начально-краевые задачи для эволюционных уравнений с целыми и дробными производными по времени и одну обратную задачу для уравнения субдиффузии на метрических графах. При этом были использованы методы потенциалов, разделение переменных (Фурье), метод унифицированного преобразования (метод Фокаса), метод априорных оценок и функциональный метод.

Основными результатами диссертационной работы являются следующие:

- Впервые были поставлены и исследованы корректные начально-краевые задачи для уравнений Эйри, с целой и дробной производной по времени, на метрических графах;
- Доказаны теоремы о корректности задачи Коши для уравнения Эйри на графе-звезде. Построены точные решение в виде интегрального представления через начальную функцию и правой части уравнения;
- Доказана однозначная разрешимость первой начально-краевой задачи для уравнения Эйри на графе-звезде. При этом, обобщен метод потенциалов для решения начально-краевых задач на метрических графах;
- Построены функции Грина первого, второго и смешанного краевых задач для параболического уравнения с дробной производной по времени на графе-звезде и на графе в виде лестницы;
- Показана однозначная разрешимость двух обратных для уравнения псевдо-субдиффузии с дробной производной Хилфера;
- Построены интегральные представление краевых задач для уравнений Шредингера и теплопроводности на графе-звезде с конечными и полубесконечными ребрами и на графе-дереве.
- Доказана глобальная однозначная разрешимость прямой и обратной задачи для уравнения субдиффузии в Соболевских пространствах на графе-звезде.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED
AFTER V.I.ROMANOVSKIY**

INSTITUTE OF MATHEMATICS

SOBIROV ZARIFBOY AKHMEDOVICH

**DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS
ON METRIC GRAPHS**

01.01.02 – Differential Equations and Mathematical Physics

**ABSTRACT
OF THE DOCTORAL (DSc) DISSERTATION
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

TASHKENT – 2024

Тема докторской (Doctor of Science) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за B2024.2.DSc/FM264.

Диссертация выполнена в институте математики имени В.И.Романовского.
Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный консультант:	Ашуров Равшан Раджабович доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Тахиров Жозил Астанович доктор физико-математических наук, профессор Кулаев Руслан Черменович доктор физико-математических наук, профессор Кадиркулов Бахтиёр Жалилович доктор физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	Самаркандский государственный университет

Защита диссертации состоится «25» июня 2024 года в «16:00» часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И. Романовского. (Адрес: 100174, г.Ташкент, Алмазарский район, ул Университетская, 9. Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathins.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 184). (Адрес: 100174, г.Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел. (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «11» июня 2024 года.
(протокол рассылки № 2 от «11» июня 2024 года).




У.А.Розиков
Председатель научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., академик


Ж.К.Адашев
Ученый секретарь научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник


А.А.Азамов
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., академик

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The aim of the research consists of developing methods for researching and generalizing existing methods for studying the solvability of initial boundary value problems and inverse problems for finding unknown right-hand sides for partial differential equations on metric graphs.

The objects of research are integer and fractional order partial differential equations on metric graphs.

Scientific novelty of the research work is as follows:

it is proven the theorem on the correctness of the Cauchy problem for the Airy equation on a star graph and constructed integral representations of the solutions by the initial function and the right side of the equation;

the potential method is generalized for solving initial-boundary value problems on metric graphs for the Airy equation with a fractional time derivative, and the unique solvability of the first initial-boundary value problem on a star graph is proven.

Green's functions of the first, second and mixed boundary value problems were constructed for a parabolic equation with a fractional time derivative on a star graph and on a graph in the form of a ladder, and also, using the Fokas method, integral representations of boundary value problems for the Schrödinger and heat equations on simple metric graphs were constructed;

on a finite connected metric graph, the unique solvability of two inverse problems for the pseudo-subdiffusion equation with the Hilfer fractional derivative is proven;

the global unique solvability of the direct and inverse problems for the subdiffusion equation in Sobolev spaces on a star graph is proven.

Implementation of the research results. The results obtained in the thesis were used in the following research projects:

the results on subdiffusion and Airy type equations with fractional time derivatives on metric graphs were used to solve time-fractional wave and diffusion equations in a foreign project NIOKTR 122041800029-5 on the topic "Boundary and control problems for basic and mixed-type equations and research of distributed parameter systems" (Reference No. 24 of April 9, 2024 of the Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Russian Federation). The use of scientific results gave opportunity to solve local and non-local problems for time-fractional derivative wave and diffusion equations and systems of equations and obtain an integral expression of the solution;

The global solution of direct and inverse problems for the subdiffusion equation given in the star graph in Sobolev spaces was used in the foreign project number AR09259394 "Inverse problems for evolutionary equations with positive operators" to solve the nonlocal boundary value and inverse source problem for the heat diffusion equation with fractional time derivative (Mathematics and Reference No. 01-06/061 of the Institute of Mathematical Modeling dated April 2, 2024,

Kazakhstan). The application of the scientific result made it possible to build algorithms for solving inverse problems for fractional order partial differential equations and to prove that such problems have a solution;

The Cauchy problem for the Airy-type fractional equation given in the star graph and the exact integral expression of the solution through the initial condition and the right-hand side of the equation were used to solve the boundary value problems for the Airy and Korteweg-de Fries equations in scientific articles published in foreign scientific journals (*Analysis&PDE*, 2018, 11 (7), 1625-1652; *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*, 2018, 69 (5), 124; *Nonlinearity*, 2020, 34 (5), 3373-3410). Application of scientific results gave opportunity to solve initial-boundary problems for Airy and Korteweg-de Vries equations in metric graphs.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, four chapters, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation is 150 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (1 часть; part 1)

1. Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. *Fokas Method for the Heat Equation on Metric Graphs*. // Journal of Mathematical Sciences, 278 (2024), 530-545 (3. Scopus, IF=0,6).
2. E. Karimov, Z.Sobirov, J. Khujakulov. *A non-local problem for a time-fractional differential equation with the Hilfer operator on metric graph*. // Mathematical Methods in the Applied Sciences (2024), pp. 1-19, DOI: 10.1002/mma.10207 (3. Scopus, IF=0,61).
3. Z.A.Sobirov. Inverse source problems for pseudo-subdiffusion equation with the Hilfer fractional derivative on a metric graph. // Bulletin of the Institute of Mathematics, Vol.7, No 2 (2024) pp. 14-23 (01.00.00; №17).
4. З.А.Собиров. *Начально-краевые задачи для уравнения Шредингера на звездообразном графе*. // Вестник НУУз, № 2.1.1 (2024), стр. 118-125. (01.00.00; №8).
5. Z.A. Sobirov. *Inverse source problem for subdiffusion equation on metric star graph in Sobolev spaces*. // Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. 44, No. 12 (2023), pp. 5416–5426 (3. Scopus, IF=0,42).
6. Z.A. Sobirov, R.A. Saparbayev. *Cauchy Problem for Subdiffusion Equation on the metric graph in the form of a series of bridges*. // Bulletin of the Institute of Mathematics, Vol.6, No 4 (2023), pp. 90-98. (01.00.00; №17).
7. Z.A. Sobirov. *Cauchy Problem for Subdiffusion Equation on Metric Star Graph with Edge Dependent Order of Time-Fractional Derivative*. Lobachevskii Journal of Mathematics, 43 (2022), 3282–3291 (3.Scopus, IF=1,6).
8. Rakhimov K.U., Sobirov Z.A. *Green's function method for subdiffusion equation on the ladder-type graph with equal bonds*. // Uzbek Mathematical Journal. Vol. 66(1) (2022), pp. 161-172.(01.00.00; №6).
9. K. Rakhimov, Z. Sobirov, N. Jabborov, *The Time-fractional Airy Equation on the Metric Graph*. // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 14(3) (2021), 376–388 (3.Scopus, IF=0,9).
10. Z. A. Sobirov, K. U. Rakhimov, R. E. Ergashov. *Green's function method for time-fractional diffusion equation on the star graph with equal bonds*. // Nanosystems: physics, chemistry, mathematics, 12 (3) (2021), P. 271–278 (3.Scopus, IF=1,3).
11. З.А. Собиров, К.У. Рахимов. *Задача Коши для уравнения Эйри с дробной производной по времени на звездообразном графе*. // Бюллетень Института математики, No. 5 (2019), стр.40-49.(01.00.00; №17).
12. M.I. Akhmedov, Z.A. Sobirov, M.R. Eshimbetov. *Initial boundary value problem for the linearized KdV equation on simple metric star graph*. Uzbek Mathematical Journal, №4 (2017), pp. 13-20. (01.00.00; №6).

13. Sobirov Z., Babajanov D., Matrasulov D., Nakamura K., Uecker H. Sine-Gordon solitons in networks: Scattering and transmission at vertices. // EPL (Europhysics Letters). // Vol. 115(5) (2016), 50002. – P. 1-6 (3.Scopus, IF=3,4).
14. Z. A. Sobirov, M. I. Akhmedov, H. Uecker. *Cauchy problem for the linearized KdV equation on general metric star graphs*. Nanosystems: physics, chemistry, mathematics, 6 (2) (2015), P. 198–204. (3.Scopus, IF=0,13)
15. Z. A. Sobirov, M. I. Akhmedov, O. V. Karpova, B. Jabbarova. *Linearized KdV equation on a metric graph*. Nanosystems: physics, chemistry, mathematics, 6 (6) (2015), P. 757–761. (WoS, IF=0,13)
16. Z.A. Sobirov, H. Uecker, M.I. Akhmedov. *Exact solutions of the Cauchy problem for the linearized KdV equation on metric star graphs*. Uzbek Mathematical Journal, №3 (2015), pp.143-154. (01.00.00; №6).
17. Nakamura K., Sobirov Z.A., Matrasulov D.U., Sawada S. *Transport in simple networks described by an integrable discrete nonlinear Schrödinger equation*. // Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 84 (2) (2011), art. no. 026609. (3.Scopus, IF=0,81)

II bo‘lim (2 часть; part 2)

18. Z. A. Sobirov, O. Kh. Abdullaev, J. R. Khujakulov. *Initial Boundary Value Problem For a Time Fractional Wave Equation on a metric Graph*. Differential Equations and Application, 15(1) (2023), pp.13–27.
19. Z. A. Sobirov, J. R. Khujakulov, A. A. Turemuratova. *Unique solvability of IBVPs for pseudo-subdiffusion equation with Hilfer fractional derivative on metric graph*, Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. Vol. 8, iss. 3 (2023), P. 351–370 .
20. Sobirov Z., Matrasulov D., Sabirov K., Sawada S., Nakamura K. Integrable nonlinear Schrödinger equation on simple networks: Connection formula at vertices. Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 81 (6), (2010), art. no. 066602.
21. G. Khudayberganov, Z. A. Sobirov, M. R. Eshimbetov. *Unified Transform method for the Schrödinger Equation on a Simple Metric Graph*. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 12(4), (2019), c. 412–420.
22. Sabirov K.K. Sobirov Z.A. Babajanov D. Matrasulov D.U. Stationary nonlinear Schrodinger equation on simplest graphs. // Phys. Lett. A. 2013. Vol. 377(12). – P. 860 – 865.
23. Uecker H., Grieser D., Sobirov Z., Babajanov D., Matrasulov D. Soliton transport in tubular networks: Transmission at vertices in the shrinking limit. // Physical Review E. – 2015. Vol. 91(2). 023209 – P. 1-8.
24. Sobirov Z., Babajanov D., Matrasulov D. Nonlinear standing waves on planar branched systems: shrinking into metric graph. // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. – 2017. Vol. 8(1). – P. 29 – 37.
25. G. Khudayberganov, Z.A. Sobirov, M.R. Eshimbetov. The Fokas' unified transformation method for heat equation on general star graph. Uzbek Mathematical Journal, 2019, №1, pp.73-81.

26. Sobirov Z.A., Uecker H., Akhmedov M. Solution Formulas for the Linearized KdV Equation on Graphs. // SIAM Conference on Nonlinear Waves and Coherent Structures. August 11-14, 2014, University of Cambridge, UK, P. 99.
27. Sobirov Z. A., Akhmedov M. I., Eshimbetov M. R. Initial boundary value problem for the Airy type equation on simple metric star graph. // Соколевские чтения Международная школа-конференция, Новосибирск, 18-22 декабря 2016 г. p 172.
28. Eshimbetov M. R., Sobirov Z. A. Unified transform method for the heat equation on simple open metric graph. // Abstracts of the VI international scientific conference “Modern problems of the applied mathematics and information technology-Al-Khorezmiy 2018” NUUZ, Tashkent, September 13-15, 2018, p. 78 – 78.
29. Sobirov Z. A., Rakhimov K. U. Задача Коши для уравнения Эйри с дробной производной по времени на звездообразном графе. // Актуальные проблемы и применение анализа, Карши, 4-5 октября 2019 г. с. 179-180.
30. Khujakulov J. R., Sobirov Z. A. Функция Грина для телеграфного уравнения дробного порядка на простом метрическом графе. // “Неклассические уравнения математической физики и их приложения” Узбекско-Российская научная конференция. Ташкент, 24-26 октября 2019 г. с 82-83.
31. Sobirov Z. A., Eshimbetov M. R. Метод Фокаса для уравнения теплопроводности на метрических графах. // Международная научная конференция «Комплексный анализ и его приложения» Сборник материалов, Казань, 24 – 28 августа 2020 г., с. 30 – 32.
32. Sobirov Z. A., Rakhimov K. U. The potential method for fractional order KDV equation on the bounded star-shaped graph. // Международная научная конференция «Теория функций одного и многих комплексных переменных» Ноябрь 26 – 28, 2020, Нукус, с. 116-119.
33. Abdullayev O. Kh., Sobirov Z. A., Khujakulov J. R. Об одной задаче для уравнения распространения тепла дробного порядка на метрическом графе. // «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики» Международная научная конференция, Фергана, 12-13 март 2020 г., том 1. с. 17-18.
34. Sobirov Z. A., Rakhimov K. U. Green’s function method for time-fractional diffusion equation on the star graph with equal bonds. // VI Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», Нальчик, 5-9 декабря 2021 г. с. 249.
35. Sobirov Z. A., Turemuratova A. A. Direct problem for time fractional heat equation on ladder type graph. // VII Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезми 2021», Фергана, ноябрь, 2021 г. с. 153.
36. Sobirov Z. A., Turemuratova A. A. Strong generalised solution of the heat equation on a metric star graph. // Сборник тезисов «Традиционная

- международная апрельская научная конференция в честь Дня работников науки», Алматы, 4-8 апреля 2023 г. с.137.
37. Sobirov Z. A., Karimov E. T., Khujakulov J. R. Inverse source problems for the time-fractional Pseudoparabolic Equation with the Caputo derivative on a star graph. // Сборник тезисов международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения» Ташкент, 23-25 ноября 2023 г. стр. 320-322.
38. Z.A. Sobirov, M.R. Eshimbetov. Fokas method for the heat equation on metric graphs. // Abstracts of the international conference Gibbs measures and the theory of dynamical systems May 20–21, 2024, Tashkent, pp. 172-173
39. Ashurov R.R., Sobirov Z.A., Turemuratova A.A. Inverse source problem for the space-time fractional parabolic equation on a metric star graph. // Abstracts of the international conference Gibbs measures and the theory of dynamical systems May 20–21, 2024, Tashkent, pp. 33-34.

Avtoreferat “O‘zbekiston matematika jurnali” tahririyatida
2024 yil 27 mayda tahrirdan o‘tkazildi.

Bosmaxona litsenziyasi:



9338

Bichimi: 84x60 ¹/₁₆. «Times New Roman» garniturası.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog'ı: 3,5. Adadi 100 dona. Buyurtma № 28/24.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko'chasi, 83-uy.