АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

На правах рукописи
УДК 510.6+512.57+519.68

ИБРАГИМОВ ФАРХОДЖОН НУРМУХАМАДЖОНОВИЧ

РЕКУРСИВНО ОТДЕЛИМЫЕ МОДЕЛИ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ТАШКЕНТ – 2011

Работа выполнена в Национальном университете Узбекистана

Қадрдон Рўзимет акага! Эзгу ниятлар тилаб, Фарход.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
Касымов Надимулла Хабибуллаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
Аллаков Исмоил

кандидат физико-математических наук
Егамбердиев Бахтияр

Ведущая организация: Институт математики СО РАН им.Соболева

Защита диссертации состоится «19» октября 2011 года в 14⁰⁰ часов на заседании Специализированного совета Д 015.17.01 в Институте математики и информационных технологий АН РУз по адресу: 100125, г. Ташкент, ул. Дурмон йули, 29.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Института математики и информационных технологий АН РУз.

Автореферат разослан «14» сентября 2011 г.

Ученый секретарь
Специализированного совета,
кандидат физ.-мат. наук с.н.с. А.А.Заитов

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность работы. Теория алгоритмов, наряду с яркими достижениями в решении вопросов внутренней проблематики, оказывает плодотворное влияние и на смежные разделы математики. Так, например, в алгебре и теории чисел, кроме традиционных, появились и новые естественно поставленные алгоритмические проблемы. Важные вопросы этих направлений – выявление алгоритмической природы элементарных теорий и их моделей, так же, как и установление наиболее общих связей между алгоритмическими и структурными свойствами моделей.

Основоположниками теории моделей являются выдающийся математик академик А.И.Мальцев и известный американский специалист по математической логике профессор А.Тарский, которые внесли весомый вклад в разработку алгоритмических проблем теории моделей. А.Тарскому принадлежит постановка проблем об алгоритмической разрешимости элементарных теорий и ряд фундаментальных результатов по их решению. Становление теории конструктивных моделей как интересного самостоятельного направления современной математической логики обязано появлению статьи А.И.Мальцева «Конструктивные алгебры.I». А.И.Мальцеву принадлежит и ряд важнейших результатов, как по разрешимости элементарных теории, так и по конструктивным моделям.

Понятие модели данных является одним из центральных понятий современного естествознания. С этим понятием тесно связаны два ключевых момента: с одной стороны, модель данных предполагает наличие алгоритмической реализации этой модели, поскольку конечным этапом работ по созданию, ведению и эксплуатации моделей данных является их реализация на компьютере. С другой стороны, языки описания моделей данных должны гарантировать пользователям как строгую адекватность создаваемой модели специфицируемому фрагменту реальности, так и возможность эффективной реализации модели данных из синтаксического материала, заключенного в самом описании модели данных. Оба этих аспекта являются центральными объектами исследования в настоящей диссертационной работе. В качестве моделей данных – одного из центральных объектов современного теоретического программирования, изучаются, главным образом, нумерованные модели с различными ограничениями структурного и алгоритмического характера, в качестве языков описания моделей данных – различные фрагменты языка первого порядка и, в особенности, алгебраические, поскольку последние имеют весьма прозрачную и легко реализуемую инициальную семантику.

Введенное А.И.Мальцевым понятие нумерованной алгебры – одно из наиболее общих центральных понятий, возникших на стыке теории универсальных алгебр и теории нумераций. В силу чрезвычайной общности класса всех нумерованных алгебр изучение последних обычно проводится в предположении наличия ограничений на алгоритмические сложности нумерационных эквивалентностей. В этом аспекте, в первую очередь, нужно отметить конструктивные и, в более общем случае, позитивные алгебры, теория которых представляет бурно развивающийся раздел современной математической логики (Ю.Л.Ершов, С.С.Гончаров). Проблемы существования и числа конструктивизаций стали уже классическими (Ю.Л.Ершов, С.С.Гончаров), а ослабление требований к алгоритмической сложности нумерационных эквивалентностей является одним из общепринятых способов расширения исследуемого класса нумерованных алгебр.

Другой путь ограничения исследуемого класса нумерованных алгебр, который, в отличие от предыдущего, игнорирует сложность нумерационной эквивалентности, заключается в наложении эффективных условий типа отделимости. Идеи использования понятия отделимости в теории нумерации восходят к В.А.Успенскому и А.Нероуду и развиваются в работах А.И.Мальцева и Ю.Л.Ершова. Классическим условием отделимости в теории алгоритмов является условие рекурсивной отделимости. Синтез понятий универсальной алгебры и рекурсивно отделимой нумерации образует понятие рекурсивно отделимой алгебры.

В различных по методам доказательства и звучанию результатах о нумерованных алгебрах из упомянутых выше классов имеется немало принципиальных общих моментов, причем справедливость весьма сильных свойств оказалась не зависящей от сложности нумерационной эквивалентности. Эти факты становятся прозрачными именно при обобщенном взгляде на ситуацию – с точки зрения теории рекурсивно отделимых нумерованных алгебр. На базе и в рамках этой теории решается ряд естественных вопросов, возникших в связи с работами А.И.Мальцева, В.Баура, Д.Бергстры и Д.Такера, М.Броя и др., С.Камина, в теории конструктивных алгебр и в теории абстрактных типов данных.

Целесообразность изучения рекурсивно отделимых нумерованных алгебр обусловливается еще одним обстоятельством. Несмотря на обширность, класс этих алгебр допускает удовлетворительное, в тех или иных смыслах, описание. Для естественного класса отделимых нумерованных алгебр, справедливы только релятивизированные варианты основных утверждений. В связи с этим уместно отметить, что в теории нумерованных алгебр роль и место рекурсивно отделимых нумерованных алгебр – с точки зрения сложности отделяющих множеств, подобны роли и месту конструктивных алгебр – с точки зрения сложности нумерационной эквивалентности.

Понятие нумерованной модели является естественным обобщением понятия нумерованной алгебры. При изучении нумерованных моделей, так же, как в случае алгебр, обычно налагаются ограничения на алгоритмические сложности нумерационных эквивалентностей.

В данной диссертационной работе вводится понятие рекурсивно отделимой нумерованной модели, которое является обобщением понятия рекурсивно отделимой нумерованной алгебры. Неформально говоря, нумерованная модель рекурсивно отделима, если каждая точка ложности любого основного отношения (включая равенство) имеет рекурсивную окрестность, не пересекающуюся с областью истинности данного отношения.

Настоящая диссертация посвящена изучению структурных свойств рекурсивно отделимых нумерованных моделей и демонстрации возможностей приложения результатов и методов этой теории к некоторым смежным областям математической логики и теоретического программирования.

Под логической программой обычно понимается конечная совокупность квазитождеств. Естественно считать канонической моделью данных для логической программы свободную систему соответствующего квазимногообразия, поскольку наиболее простые и важные запросы к логической программе в виде экзистенциальных позитивных предложений, истинные в некоторой свободной модели, суть логические следствия программы в силу устойчивости таких предложений относительно эпиморфизмов и расширений. Стандартной или «самой канонической» моделью логической программы называется свободная система, порожденная значениями сигнатурных констант. Именно в этой модели, называемой инициальной, заключена семантика логической программы.

Пусть S – спецификация некоторого понятия в языке L. В теории спецификаций программ имеются две связанные классические проблемы:

проблема существования инициальной модели для S, обладающей эффективной реализацией, и проблема существования для данной модели её спецификации S в языке L, для которой исходная модель является инициальной.

Степень изученности проблемы. В работах Н.Х.Касымова изучены наиболее общие эффективные, структурные и топологические свойства рекурсивно отделимых алгебр и описаны важнейшие типы таких алгебр. Многие естественные и важные типы нумерованных алгебр оказались рекурсивно отделимыми, в том числе – среди неочевидных – негативные алгебры, позитивные алгебры со счетными решетками конгруэнций, конечно-порожденные финитно-аппроксимируемые алгебры. Негативные нумерации и негативные алгебры с различных точек зрения исследовались А.И.Мальцевым, Ю.Л.Ершовым, А.С.Морозовым, С.П.Одинцовым и В.Л.Селивановым. Результаты о позитивных алгебрах со счётными решетками конгруэнций можно найти у А.И.Мальцева и Ю.Л.Ершова, А.В.Кузнецова, В.Баура.

В предлагаемой диссертации заложены основы теории рекурсивно отделимых моделей, которая включает теорию рекурсивно отделимых алгебр как составную часть. При этом, рассмотрение наряду с рекурсивной отделимостью отношения равенства (в случае алгебр) произвольных систем рекурсивно отделимых отношений (в случае моделей) рассматривается впервые и основные результаты для моделей являются нетривиальными обобщениями соответствующих результатов для алгебр.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Тема диссертационной работы была утверждена на Ученом совете механико-математического факультета НУУз «26» апреля 2007 года (выписка из протокола № 10) и выполнена в соответствии с плановой темой кафедры "Алгебра и функциональный анализ".

Цель исследования. Целью диссертационной работы является исследование структурных свойств рекурсивно отделимых моделей и некоторых вопросов специфицируемости моделей данных.

Задачи исследования. В диссертационной работе рассматриваются следующие задачи:

– дать структурную характеризацию рекурсивно отделимых моделей;

– описать класс негативных моделей;

– найти естественные критерии равномерно рекурсивной отделимости нумерованных моделей;

– исследовать свойства позитивно представимых моделей с условиями конечности для решеток конгруэнций;

– определить грани между выразительными возможностями универсальных и универсальных хорновских предложений с точки зрения возможности выделения моделей в эффективно аксиоматизируемых классах их гомоморфных образов.

Методы исследований. В работе используются методы теории алгоритмов, теории алгебраических систем и теоретического программирования.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты:

1) доказано, что нумерованная модель рекурсивно отделима тогда и только тогда, когда она апроксимируется негативными моделями;

2) показано, что нумерованная модель негативна тогда и только тогда, когда она является равномерно рекурсивно отделимой моделью со слабо перечислимыми дополнениями всех основных отношений;

3) доказано, что нумерованная модель равномерно рекурсивно отделима тогда и только тогда, когда она равномерно апроксимируется негативными моделями;

4) показано, что всякая полурекурсивная модель со счетной артиновой решеткой нормальных конгруэнций является рекурсивной;

5) построен пример позитивной нерекурсивной модели, выделяемой в классе своих собственных позитивно представимых гомоморфных образов подходящей универсальной спецификацией.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Результаты и методы, представленные в диссертации, могут быть использованы при исследованиях в теории нумерованных моделей, теоретическом программировании, теории спецификаций программ.

Реализация результатов. Диссертация носит теоретический характер.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на научном семинаре «Современные алгебры и их приложения» кафедры алгебры и функционального анализа механико-математического факультета НУУз под руководством академика Ш.А.Аюпова (2005–2011 г.г.), на международной научной конференции «Математическая логика и алгебра», посвященной 90-летию

А.И.Мальцева (сентябрь, 1999 г.), на семинаре «Операторные алгебры и их приложения» под руководством академика АН РУз Ш.А.Аюпова в Институте математики им. В.И.Романовского АН РУз (2010–2011 г.г.), на семинаре кафедры геометрии и прикладной математики на механико-математическом факультете НУУз под руководством академика Н.Ю.Сатимова и профессора А.Я.Нарманова (2000–2005 г.г.), на республиканской научной конференции молодых математиков (Наманган, 2009 г.), на научной конференции «Проблемы современной математики», посвященной 20-летию независимости Республики Узбекистан (Карши, 2011 г.).

Опубликованность результатов. Список публикаций приведен в конце автореферата, в разделе «Список опубликованных работ». Постановки задач в работах [1]–[10], а также некоторые идеи доказательств работ [6]–[10] принадлежат Н.Х.Касымову, основные результаты получены диссертантом.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 64 страницах и состоит из введения, трех глав, разбитых на 10 параграфов, заключения и 74 наименований использованной литературы.

2. ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе даются необходимые определения, постановки задач и формулируются основные полученные результаты, касающиеся темы данной диссертационной работы, по теории универсальных алгебр, теории рекурсивно отделимых нумерованных алгебр и теории спецификаций. Дается также обзор работ по проблематике диссертации, излагаются постановки задач и описываются полученные результаты.

В первом параграфе второй главы введено понятие рекурсивно отделимой модели, являющейся естественным обобщением понятия рекурсивно отделимой алгебры, и изучаются наиболее общие эффективные и структурные свойства рекурсивно отделимых нумерованных моделей.

Пусть $(\mathfrak{M},\nu)$ - нумерованное множество. Подмножество $A\subseteq\omega$ называется ν - замкнутым, если $(x\in A \,\&\, \nu x=\nu y)\to y\in A$.

Определение 2.1.1. Нумерованная модель $(\mathfrak{M},\nu)$ называется рекурсивно отделимой, если для всякого n-местного отношения P (включая равенство) модели $\mathfrak{M}$ и любого такого кортежа натуральных чисел $\bar{x}\in\omega^n$, что $\mathfrak{M}\models\neg P(\nu\bar{x})$, существует такое ν - замкнутое рекурсивное множество $A\subseteq\omega^n$, что $\bar{x}\in A \,\&\, \forall a\in A\ (\mathfrak{M}\models\neg P(\nu\bar{a}))$.

Это определение является естественным обобщением определения рекурсивно отделимой алгебры. Неформально говоря, рекурсивная отделимость нумерованной модели означает, что каждая точка ложности любого предиката имеет рекурсивную окрестность, не пересекающуюся с областью истинности данного предиката.

Из результатов Н.Х.Касымова, вытекает важность негативных нумераций и негативных алгебр сточки зрения теории рекурсивно отделимых нумерованных алгебр. Негативные модели играют аналогичную роль в характеризации рекурсивно отделимых нумерованных моделей. Кроме того, понятие негативной модели является алгоритмически «двойственным» одному из важнейших понятий теории конструктивных моделей и теории абстрактных типов данных – понятию позитивной модели. Наконец, негативные нумерации и негативные модели сами по себе являются весьма естественным объектами.

Во втором параграфе второй главы дана характеризация рекурсивно отделимых нумерованных моделей в терминах гомоморфизмов на негативные модели. Основные результаты данного параграфа следующие:

Теорема 2.2.1. Всякая негативная модель является рекурсивно отделимой нумерованной моделью.

Теорема 2.2.2. Нумерованная модель является рекурсивно отделимой тогда и только тогда когда она апроксимируется негативными моделями.

В параграфе 2.3 даны характеризации равномерно рекурсивно отделимых и негативных моделей.

Если в определении рекурсивной отделимости модели потребовать наличие эффективного процесса, который для каждой точки ложности любого предиката «выдает» соответствующий алгоритм разрешения множества, содержащего данную точку и не пересекающегося с областью истинности данного предиката, то получим понятие равномерно рекурсивно отделимой модели.

Формально дадим следующее

Определение 2.3.1 Нумерованная модель называется равномерно рекурсивно отделимой, если существует частично рекурсивная функция $g(c(\bar{x}),\gamma(P),z)$, где c-функция свёртки и $\gamma(P)$ канонический номер предиката P со следующим свойством:

для всякого n-местного отношения P и любого такого набора натуральных чисел $\bar{x}\in\omega^n$, что $\mathfrak{M}\vDash\neg P(\nu\bar{x})$, одноместная функция $\lambda z.\ g(c(\bar{x}),\gamma(P),z)$ есть общерекурсивная характеристическая функция множества, являющегося сверткой ν-замкнутого рекурсивного множества отделяющего $\bar{x}$ от области истинности P.

Определение 2.3.2. Нумерованная модель $(\mathfrak{M},\nu)$ называется равномерно аппроксимируемой К-моделями, если существует алгоритм, значение которого на каждой паре $\langle P,\bar{x}\rangle$ при $\mathfrak{M}\vDash\neg P(\nu\bar{x})$ определено и равно перечислимому индексу негативной К-модели, сохраняющей ложность P в естественном гомоморфном образе набора $\nu\bar{x}$.

Под перечислимым индексом негативной модели $(\mathfrak{M},\mu)$ мы понимаем алгоритм (его р.п. индекс), определяющий процедуру перечисления дополнения всех основных отношений.

Определение 2.3.3. Бескванторная формула вида $A_1\vee\ldots\vee A_n\to\Phi$, где A_i-атомарные, Φ-позитивная формула, называется дизъюнктивно-импликативно-позитивной (ДИП-формулой).

Универсальное замыкание ДИП-формулы называется универсальным ДИП-предложением.

Негативные модели, опять-таки, образуют важный класс равномерно рекурсивно отделимых моделей.

Теорема 2.3.1. Для нумерованной модели $(\mathfrak{M},\nu)$ равносильны следующие условия:

1) $(\mathfrak{M},\nu)$ – равномерно рекурсивно отделимая модель;
2) Если К – рекурсивно перечислимое множество универсальных ДИП-предложений, реализующееся в $\mathfrak{M}$, то $(\mathfrak{M},\nu)$ равномерно аппроксимируется негативными К-моделями.

Следствие 2.3.1. Нумерованная модель равномерно рекурсивно отделима тогда и только тогда, когда она равномерно аппроксимируется негативными моделями.

В формулировке теоремы 2.3.1. нельзя заменить универсальные ДИП-предложения произвольными универсальными и экзистенциальными ДИП-предложениями, так же, как нельзя опустить условие равномерности.

Подмножество $A\subset\mathfrak{M}$ называется слабо перечислимым, если существует такое рекурсивно перечислимое множество $\alpha\subset\omega$, что $\nu\alpha=A$.

Теорема 2.3.2. Нумерованная модель негативна тогда и только тогда, когда она является равномерно рекурсивно отделимой моделью со слабо перечислимыми дополнениями всех основных отношений.

Проблематика изучения алгоритмических свойств алгебр с условиями конечности восходит к работам А.И.Мальцева. В частности, им доказана рекурсивность всякой конечно-порожденной позитивной алгебры, обладающей ненулевыми конгруэнциями только конечного индекса. В.Баур показал рекурсивность ассоциативно-коммутативных позитивных колец с весьма общими ограничениями типа максимальности на решетки идеалов. Полное описание алгоритмических свойств нерекурсивных позитивных алгебр с условиями максимальности для решеток конгруэнций дано Н.Х.Касымовым.

В первом параграфе третьей главы изучается вопрос о мощности решеток нормальных конгруэнций моделей с условиями артиновости, обладающих позитивными представлениями с рекурсивными основными отношениями.

Определение 3.1.1. Нумерованная модель $(\mathfrak{M},\nu)$ называется полурекурсивной, если все её основные отношения равномерно рекурсивны, а отношение равенства рекурсивно перечислимо.

Определение 3.1.2. Конгруэнция Q функционального обеднения модели $\mathfrak{M}$ называется нормальной, если для всякого основного отношения P модели $\mathfrak{M}$ конгруэнция Q имеет свойства равенства, т.е.

$$(P(\bar{x})\,\&\,(\bar{x}=\bar{y}(\mathrm{mod}\,Q)))\to P(\bar{y}),\bar{x},\bar{y}\in|\mathfrak{M}|^{\mu(P)}.$$

Множество всех конгруэнций функционального обеднения модели $\mathfrak{M}$ обозначим через $L_Q(\mathfrak{M})$, а множество всех нормальных конгруэнций через $LN_Q(\mathfrak{M})$.

Предложение 3.1.1. Множество $LN_0(\mathfrak{M})$ всех нормальных конгруэнций функционального обедиения модели $\mathfrak{M}$ является полной алгебраической подрешеткой решетки $L_0(\mathfrak{M})$.

Теорема 3.1.1. Пусть $(\mathfrak{M},\nu)$ - полурекурсивная нерекурсивная модель. Если решётка $LN_0(\mathfrak{M})$ нормальных конгруэнций модели $\mathfrak{M}$ является артиновой, то $|LN_0(\mathfrak{M})| = 2^{\omega}$.

Следствие 3.1.1. Всякая позитивная нумерация алгебры со счетной артиновой решеткой конгруэнций является рекурсивной.

Отметим, что всякая позитивная нумерация алгебры со счетной (в частности нетеровой) решеткой конгруэнций является рекурсивно отделимой, причем существует масса примеров, в том числе важных и интересных, позитивных нерекурсивных алгебр со счетными решетками конгруэнций.

Уместно также отметить, что следствие 3.1.1 остается справедливым при замене словосочетания «со счетной» на «с менее, чем континуальной», поскольку, даже при отрицании континуум-гипотезы (и, соответственно, существовании промежуточных мощностей), в предположении неразрешимости удается построить ровно континуум конгруэнций.

В втором параграфе третьей главы показана справедливость аналога теоремы Биркгофа о подпрямом разложении для нормальных конгруэнций.

Теорема 3.2.2. Всякая модель нормально разлагается в подпрямое произведение далее нормально неразложимых моделей.

В теории спецификаций программ и эффективной реализуемости можно считать достаточно утвердившимся тезис о позитивной представимости любой модели данных. Семантика таких моделей должна адекватно определяться их синтаксическими описаниями, которые, очевидно, обязаны иметь однозначно определенную интерпретацию и механизмы генерирования фактов о свойствах моделей. Другими словами, языки описания по определению являются логическими.

На сегодняшний день наиболее изученным и обладающим достаточно большой областью применимости является язык исчисления предикатов первого порядка и различные его фрагменты. Особенно часто применяемую на практике часть этого языка образуют универсальные хорновские предложения, на которых основаны языки логического программирования. Этот факт связан с двумя обстоятельствами:

1) всякое непротиворечивое эффективное множество универсальных хорновских предложений имеет позитивно представимую модель;

2) семантика этой модели заключена в устройстве инициальной модели данного множества предложений, которая всегда существует и, более того, существует алгоритм извлечения ее эффективной реализации из синтаксического описания.

Эти факты являются классическими в математической логике, поэтому определение границ применимости данного языка, вопросы определимости моделей в классах их гомоморфных образов (инициальная семантика – строе-

ние свободной системы), а также о числе реализаций (эффективных, поскольку ничто другое нельзя считать реализацией в программировании) являются основополагающими в этой парадигме программирования. Согласно этой парадигме алгоритм должен иметь не императивный, а декларативный характер, и решение задачи должно заключаться не в описании конкретных процедур достижения цели, а в формулировке желаемой цели, при предоставлении поиска реализующей процедуры самой машине, предпринимающей эти попытки исходя из синтаксического материала описания модели.

Вопросы о числе эффективных реализаций (с точностью до рекурсивной эквивалентности) входят в число принципиальных вопросов теории конструктивных моделей и теории спецификаций программ. Например, как заметил С.С.Гончаров, для классических аксиом Пеано, описывающих стандартную модель арифметики, эта стандартная модель является единственной (с точностью до изоморфизма) среди тех, которые имеют позитивные представления. Вообще, любое непротиворечивое множество формул логики первого порядка, имеющее счётно-бесконечную модель обычно обладает массой других счетных моделей, в том числе элементарных расширений. В рамках инициальной семантики, которую мы принимаем, разумно исключить различные расширения и сосредоточиться на гомоморфных образах. Можно принять в определении модели данных пункт, требующий порожденности сигнатурными константами, который автоматически выводит из класса реализаций те, которые нестандартны в данном смысле. В любом случае следует помнить, что говоря о единственности реализации мы подразумеваем эту единственность для стандартной модели.

Модель, имеющая позитивную нумерацию, называется позитивно представимой. Если $(\mathfrak{M},\nu)$ – нумерованная модель, то через $\mathfrak{M}_\nu$, будем обозначать следующее обогащение модели $\mathfrak{M}$ счетным множеством констант, каждая из которых не принадлежит сигнатуре модели $\mathfrak{M}$: $\nu n = c_n$. Модель $\mathfrak{M}_\nu$ будем называть стандартным ν-обогащением модели $\mathfrak{M}$. Далее нумерованная модель $(\mathfrak{M},\nu)$ и обогащение $\mathfrak{M}_\nu$ модели $\mathfrak{M}$ будут отождествляться, поскольку в рассматриваемых нами случаях эти представления рекурсивно эквивалентны.

Определение 3.3.1. Спецификацией называется любое непротиворечивое рекурсивно перечислимое множество предложений логики первого порядка.

Спецификация называется хорновской (универсальной, экзистенциальной, индуктивной и т.д.), если каждое предложение из нее есть предложение хорновское (соответственно универсальное, экзистенциальное, индуктивное и т.д.)

Пусть $(\mathfrak{M},\nu)$ – позитивная модель, **Ф** – универсальная хорновская спецификация в сигнатуре модели $\mathfrak{M}$, реализующаяся в $\mathfrak{M}$. Тогда, очевидно, **Ф** реализуется и в $\mathfrak{M}_\nu$. Н.Х.Касымов доказал, что если **Ф** не реализуется ни в каком эффективном гомоморфном образе модели $\mathfrak{M}_\nu$, то ν – разрешимая нумерация. Другими словами, если $(\mathfrak{M},\nu)$– позитивная нерекурсивная модель и **Ф**

– универсальная хорновская спецификация, реализующаяся в $\mathfrak{M}$, то в классе Ф-моделей содержатся собственные позитивно представимые гомоморфные образы $\mathfrak{M}$.

Следовательно, никакую позитивную нерекурсивную модель нельзя выделить в классе ее собственных позитивных гомоморфных образов никакой универсальной хорновской спецификацией.

Известно, что никакую позитивную нерекурсивную модель нельзя выделить в классе ее собственных гомоморфных образов никакой универсальной спецификацией.

Сказанное выше поставило проблему определения тонкой грани (если она существует) между выразительными возможностями универсальных хорновских и универсальных спецификаций в рамках проблемы определимости модели в классе ее гомоморфных образов. Иначе говоря, можно ли в принципе выделить позитивную нерекурсивную модель в классе ее собственных эффективных гомоморфных образов подходящей универсальной спецификацией?

Теорема 3.3.1. Существует позитивно представимая модель, не обладающая рекурсивными представлениями, которая выделяется в классе своих собственных позитивно представимых гомоморфных образов подходящей универсальной спецификацией.

Уникальность модели из теоремы 3.3.1 демонстрирует следующий факт.

Следствие 3.3.1. Существуют позитивно представимая модель $\mathfrak{M}$ и ее универсальная спецификация **Ф** со следующими свойствами:

- $\mathfrak{M}$ не имеет рекурсивного представления;
- всякая позитивно представимая **Ф**-модель, построенная из констант, изоморфна $\mathfrak{M}$;
- $\mathfrak{M}$ изоморфно вложима во всякую позитивно представимую **Ф**-модель.

Заметим, что теорему 3.3.1 можно усилить.

Следствие 3.3.2. Существует позитивно представимая модель, не обладающая рекурсивными представлениями, которая выделяется в классе своих собственных позитивно представимых гомоморфных образов подходящей бескванторной спецификацией.

Очевидно, что такая спецификация не может быть хорновской.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертация посвящена изучению структурной теории рекурсивно отделимых нумерованных моделей и вопросам их специфицируемости универсальными предложениями.

Доказано, что нумерованная модель рекурсивно отделима тогда и только тогда, когда она апроксимируется негативными моделями.

Показано, что нумерованная модель негативна тогда и только тогда, когда она является равномерно рекурсивно отделимой моделью со слабо перечислимыми дополнениями всех основных отношений.

Приведен критерий равномерно рекурсивной отделимости нумерованной модели: нумерованная модель равномерно рекурсивно отделима тогда и только тогда, когда она равномерно аппроксимируется негативными моделями.

Показано, что если решетка нормальных конгруэнций полурекурсивной нерекурсивной модели является артиновой, то мощность этой решетки есть континуум. В частности, всякая позитивная нумерация модели со счетной артиновой решеткой нормальных конгруэнций является рекурсивной.

Введено понятие нормальной разложимости модели в подпрямое произведение. Показана справедливость аналога теоремы Биркгофа для моделей.

Построен пример позитивной нерекурсивной модели, которая выделяется в классе своих собственных позитивно представимых гомоморфных образов подходящей универсальной спецификацией. Тем самым, определена принципиальная грань между выразительными возможностями универсальных и универсальных хорновских предложений с точки зрения возможности выделения модели среди всех ее эффективных гомоморфных образов.

Работа носит теоретический характер. Результаты и методы, представленные в диссертации, могут быть использованы при исследованиях в теории нумерованных моделей, теоретическом программировании, теории спецификаций программ.

4. СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Ибрагимов Ф.Н. О подпрямой неразложимости моделей. // «Современные проблемы алгоритмизации»: Тез. докл. Респ. науч.конф. - Ташкент,1996 - стр 15-16.
2. Ибрагимов Ф.Н. О полурекурсивных моделях с условиями конечности. // ДАН РУз. - Ташкент, 1997. - № 5. - С. 8 – 11.
3. Ибрагимов Ф.Н. К теории рекурсивно отделимых моделей. // Вестник НУУз. – 2006. - №2.- С. 23 – 27.
4. Ибрагимов Ф.Н. Рекурсивно отделимые алгоритмические реализации моделей данных. // Тез. докл. Респ. Конференции молодых математиков. - Наманган,2009. –С. 21.
5. Ибрагимов Ф.Н. Позитивные алгебры с артиновыми решетками конгруэнций. // «Проблемы современной математики»: Труды. научн. конф. - Карши, 2011.– С. 137-138.
6. Ибрагимов Ф.Н., Касымов Н.Х. О рекурсивно отделимых моделях. // Материалы междунар. конф. по матем. логике посв. 90 – летию А.И.Мальцева. - Новосибирск, 1999.- С.25 - 26
7. Касымов Н.Х., Ибрагимов Ф.Н. Алгебраический критерий рекурсивной отделимости нумерованных моделей. // «Современные проблемы алгоритмизации»: Тез. докл. Респ. науч.конф. - Ташкент,1996 - стр 20-21.
8. Касымов Н.Х., Ибрагимов Ф.Н. Два замечания о рекурсивно отделимых моделях. // «Современные проблемы алгоритмизации»: Тез. докл. Респ. науч.конф. - Ташкент,1996 - стр 21-22.
9. Касымов Н.Х., Ибрагимов Ф.Н. Структурная характеризация рекурсивно отделимых моделей. // ДАН РУз. - Ташкент, 1998. - № 11. - С. 14 – 16.
10. Касымов Н.Х., Ибрагимов Ф.Н. Об универсальной спецификации с единственной эффективной нерекурсивной реализацией. // Узб.Матем. Журнал. – Ташкент, 2006. - № 2. – С.11 – 15.

Физика-математика фанлари номзоди илмий даражасига талабгор **Ибрагимов Фарходжон Нурмухамаджонович**нинг 01.01.06-математик мантиқ, алгебра ва сонлар назарияси ихтисослиги бўйича **«Рекурсив ажратиладиган моделлар»** мавзусидаги диссертациясининг

РЕЗЮМЕСИ

Таянч сўзлар: номерланган моделлар, рекурсив ажратилувчанлик, негатив моделлар, текис рекурсив ажратилувчанлик, универсал спецификация.

Тадқиқот объектлари: Рекурсив ажратиладиган моделлар, Артин шартига эга ярим рекурсив моделлар, универсал спецификациялар.

Ишнинг мақсади: Рекурсив ажратиладиган моделларнинг структуравий хоссаларини ва моделларнинг спецификация масалаларини тадқиқ қилиш.

Тадқиқот методлари: Алгоритмлар назарияси, моделлар назарияси ва назарий программалаш усулларидан фойдаланилди.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: диссертацияда олинган барча асосий натижалар янги бўлиб, улар қуйидагилардан иборат:

– номерланган модел рекурсив ажратиладиган бўлиши учун унинг негатив моделлар билан аппроксимацияланиши зарур ва етарли эканлиги исботланган;

– номерланган модел негатив бўлиши учун унинг барча асосий муносабатларининг тўлдирувчиси кучсиз саналувчи бўлган рекурсив ажратиладиган модел бўлиши зарур ва етарли эканлиги исботланган;

– номерланган модел текис рекурсив ажратиладиган бўлиши учун унинг негатив моделлар билан текис аппроксимацияланиши зарур ва етарли эканлиги исботланган;

– агар рекурсив бўлмаган ярим рекурсив моделнинг нормал конгруэнциялар панжараси артин шартини қаноатлантирса, у холда ушбу панжаранинг қуввати континуум эканлиги исботланган;

-мос универсал спецификация ёрдамида ўзининг хос позитив тасвирланувчи гомоморф образлари синфида ажралувчи рекурсив бўлмаган позитив моделга мисол қурилган.

Амалий аҳамияти: диссертацияда олинган натижалар илмий-назарий аҳамиятга эга.

Татбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: Университет магистратурасида махсус курсларни ўқишда фойдаланиш мумкин.

Қўлланиш соҳаси: диссертацияда олинган асосий натижалар ва усуллардан математик мантиқ, алгоритмлар назарияси ва назарий программалаш соҳаларидаги илмий изланишларда қўлланилиши мумкин.

РЕЗЮМЕ

диссертации **Ибрагимова Фарходжон Нурмухамаджоновича** на тему: **«Рекурсивно отделимые модели»** на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 –математическая логика, алгебра и теория чисел.

Ключевые слова: нумерованные модели, рекурсивно отделимость, негативные модели, равномерно рекурсивно отделимость, универсальная спецификация.

Объекты исследования: Рекурсивно отделимые модели, полурекурсивные модели с условием артиновости, универсальные специфи**Цель работы:** Целью диссертационной работы является исследование структурных свойств рекурсивно отделимых моделей и вопросов спецификаций моделей данных.

Методы исследования: В работе используются методы теории алгоритмов, теории моделей и теоретического программирования.

Полученные результаты и их новизна: все полученные результаты являются новыми. Они состоят в следующем:

- доказано, что нумерованная модель рекурсивно отделима тогда и только тогда, когда она апроксимируется негативными моделями;
- доказано, что нумерованная модель негативна тогда и только тогда, когда она является равномерно рекурсивно отделимой моделью со слабо перечислимыми дополнениями всех основных отношений;
- доказано, что нумерованная модель равномерно рекурсивно отделима тогда и только тогда, когда она равномерно апроксимируется негативными моделями;
- доказано, что если решетка нормальных конгруэнций полурекурсивной нерекурсивной модели является артиновой, то мощность этой решетки есть континиум;
- построен пример позитивной нерекурсивной модели, которая выделяется в классе своих собственных позитивно представимых гомоморфных образов подходящей универсальной спецификацией.

Практическая значимость: результаты, полученные в диссертации, имеют теоретический характер.

Степень внедрения и экономическая эффективность: Можно использовать при чтении специальных курсов для магистров и аспирантов по специальности математическая логика, универсальная алгебра.

Область применения: Результаты и методы, представленные в диссертации, могут быть использованы при исследованиях в области математической логики, теории алгоритмов и теоретическом программировании.

RESUME

Thesis of **Ibragimov Farkhodjon Nurmukhamadjonovich** on the scientific degree competition of the doctor of philosophy in physics and mathematics on specialty 01.01.06 - Mathematical logic, algebra and number theory, subject: **"Recursively separable models".**

Key words: numbered models, recursively separability, the negative model, uniformly recursive separability, universal specification.

Subjects of research: Recursively separable model, the semirecursive model with the Artinian condition, universal specification.

Purpose of work: To investigate the structural properties of recursively separable models and problems of specifications of data models.

Methods of research: methods of the theory of algorithms, theory of models and theoretical programming.

The results obtained and their novelty: all results are new:

- proved that the numbered model is recursively separable if and only if it is approximated by negative models;
- proved that the numbered model is negative if and only if it is uniformly recursively separable model with weakly enumerable complements all of the basic relations;
- proved that the numbered model is uniformly recursively separable if and only if it is uniformly approximated by negative models;
- proved that if the lattice of normal congruences semirecursive nonrecursive model is artinian, then the power of the lattice is continuum;
- an example of a positive non-recursive model is found, which stands in a class of their own positive representable homomorphic images of a suitable universal specification.

Practical value: The results of the dissertation are of theoretical character.

Degree of embed and economic effectivity: It can be used in the special courses of the theory of models.

Field of application: The results and methods presented in the thesis can be used for research in mathematical logic, theory of algorithms and theoretical programming.

Подписано к печати 13.09.11. Объем 1 п.л.
Формат 60х84 1/8. Тираж 100. Заказ № 219.
Отпечатано в типографии Национального университета
Узбекистана им. М.Улугбека