

# O‘ZMU XABARLARI

## ВЕСТНИК НУУЗ

### АСТА NUUZ

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY  
UNIVERSITETINING ILMIY JURNALI

**JURNAL 1997  
YILDAN  
CHIQA  
BOSHLAGAN**

**2023  
1/1  
Aniq  
fanlar**

Bosh muharrir:

**MADJIDOV I. U.** — t.f.d., professor

Bosh muharrir o‘rinbosari:

**ERGASHOV Y. S.** — f.-m.f.d., professor

Tahrir hay‘ati:

**Abdushukurov A. A.** – f.-m.f.d., prof.

**Alimov Sh. A.** – f.-m.f.d., prof., O‘zR FA akademigi

**Aripov M. M.** – f.-m.f.d., prof.

**Ashurov R. R.** – f.-m.f.d., prof.

**Ayupov Sh. A.** – f.-m.f.d., prof., O‘zR FA akademigi

**Beshimov R. B.** – f.-m.f.d., prof.

**Ganixodjayev R. N.** – f.-m.f.d., prof.

**Zikirov O. S.** – f.-m.f.d., prof.

**Narmonov A. Y.** – f.-m.f.d., prof.

**Sadullayev A.** – f.-m.f.d., prof., O‘zR FA akademigi

**Xayotov A.** – f.-m.f.d., prof.

**Xudoyberganov G.** – f.-m.f.d., prof.

**Xudoyberdiyev A.** – f.-m.f.d. prof.

**Shoimqulov B. A.** – f.-m.f.d., prof.

Ma‘sul kotib: **Narzillayev N. X.**

**TOSHKENT — 2023**

**MUNDARIJA**  
**CONTENTS**  
**СОДЕРЖАНИЕ**

<b>Заитов А. А., Рузиев Ж. Э.</b> Группы топологических преобразований на пространстве вероятностных мер на тихоновском пространстве .....	4
<b>Jabborov N. M., Eshdavlatova S. E.</b> Korrupsiyani matematik modellashtirish va dinamikasini nazorat choralari orqali tahlil qilish .....	13
<b>Safarov T. N.</b> Uch o‘lchovli affin fazolarida elliptik va giperbolik geometriyalar ..	21
<b>Abdullayev J. I., Toshturdiyev A. M.</b> Kuchli ta’sirlashuvda bo‘lgan uch zarrachali sistemaning bog‘langan holatlari .....	32
<b>Abdushukurov A. A., Zakhidov D. G‘.</b> Dividing ten participants on social networks into a community using maximum likelihood .....	49
<b>Abdushukurov A. A., Erisbaev S. A.</b> Tasodifiy senzurlanishning qisman informativ modelida baholar effektivligini aniqlash uchun quyi chegaralar .....	55
<b>Mukimov A. Sh.</b> By the asymptotic of the solution of the heat conduction problem with double variable density and absorption at a critical parameter .....	62
<b>Рахмонов Ф. Д.</b> Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения типа Бенни-Люка высокого порядка .....	69
<b>Masharipov S. I.</b> Some partially oriented graphs and dynamics of lotka-volterra operators corresponding to them in the $S^3$ simplex .....	78
<b>Кучаров Р. Р., Тухтамуродова Т. М., Арзикулов Г. П.</b> Существенный спектр одного частичного интегрального оператора с вырожденным ядром ...	85
<b>Кабулов А. В., Бабаджанов А. Ф., Сайманов И. М.</b> Алгебраические подходы решения задач распознавания .....	97
<b>Кылышбаева Г. К.</b> Задача с граничным условием второго рода для уравнения параболо-гиперболического типа с суперпозицией операторов первого и второго порядка .....	111
<b>Vozorboyev S. U., Boymurodov S. I.</b> Grin funksiyasining parametr bo‘yicha uzluksizligi .....	125
<b>Naydarov F. H.</b> Gradient Gibbs measures of a SOS model with countable set of spin values on a Cayley tree .....	129
<b>Боймуродов Ж. Х.</b> Критерий существования собственного значения системы трех частиц на решетке .....	135
<b>Худойкулов Ш. Ш.</b> О некоторой линейной двухточечной обратной задаче для трёхмерного уравнения теплопроводности с полунелокальными краевыми условиями .....	148
<b>Юнусов О. М.</b> Краевая задача с граничным условием второго рода для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа в специальной области .....	162
<b>Нарзиллаев Н. Х.</b> Функция гринна с весом в классе $m$ -субгармонических функций .....	173
<b>Бешимов Р. Б., Мамадалиев Н. К., Манасыпова Р. З.</b> О некоторых свойствах $\tau$ -границы множества .....	176
<b>Игнатъев Н. А., Акбаров Б. Х.</b> Анализ мутаций в генотипе ELP6-201 .....	183

<b>Madatova F. A.</b> On the Discrete Spectrum of the One-dimensional Discrete Schrödinger operator with two-rank perturbation .....	191
<b>Эшимбетов М. Р., Эргашов Р. Э.</b> Метод Фокаса для задачи Коши для уравнения диффузии на метрических графах .....	205
<b>Vobokandov M. M.</b> Global Solutions for Double Nonlinear Parabolic Crosswise-Diffusion Systems with and Time-Dependent Nonlinearity Absorption .....	220
<b>Rajabov J. Sh.</b> Formalizing the Uzbek Language: A Comprehensive Exploration using Backus-Naur Forms .....	230
<b>Хайдаров А. Т., Бегулов У. У.</b> Eksponensial o‘zgaruvchan zichlikli chiziqsiz muhitda issiqlik tarqalish jarayonini matematik modellashtirish .....	240
<b>Игнатьев Н. А., Турсунмуротов Д. Х.</b> Об регуляризаторах в метрических алгоритмах распознавания .....	248
<b>Нарузов Э. Р.</b> О методах борьбы с отказом в обслуживании в компьютерных сетях .....	255
<b>Гайназаров С. М.</b> Компьютерное моделирование прохождения гармонической волны в упругой среде с условием прозрачности границ .....	265
<b>Ergashova Sh. R.</b> About geometrical properties of completely integrable Hamiltonian system .....	273

УДК 517.953

**МЕТОД ФОКАСА ДЛЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
ДИФФУЗИИ НА МЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ****Эшимбетов М. Р., Эргашов Р. Э. \*****РЕЗЮМЕ**

В работе дан метод построения решений начально краевых задач для уравнения диффузии на простых метрических графах, таких как звездообразный граф с тремя сходящимися ребрами. Решения задач построены так называемым методом Фокаса, которое является обобщением метода преобразования Фурье. При этом, задача сведена к системе алгебраических функций, относительно преобразования Фурье неизвестных значений решения в вершинах графа.

**Ключевые слова:** Уравнение теплопроводности, метрический граф, разветвленные структуры, метод Фокаса, унифицированное преобразование, преобразование Фурье, начально-краевая задача.

Известно, что краевые задачи для уравнений с частными производными на метрических графах используются для моделирования процесса диффузии и распространения волн в разветвленных структурах для многих проблем физики, химии и биологии [1,2]. При этом, в точках разветвления графа используется обобщенное условие локального сохранения потока, т.е. условие Кирхгоффа, которое, в самом простом случае, состоит из условий непрерывности решения на вершине графа и равенства к нулю суммы исходящих односторонних производных решения на вершине.

Граф состоит из точек, называемыми вершинами, и из отрезков, концы которых лежат в вершинах графа [3]. Эти отрезки называются ребрами графа. Мы всегда будем рассматривать связанные графы, т.е. графы, в которых из любой точки можно попасть в другую по ребрам графа. Изометрическим сопоставлением каждого ребра графа на числовые интервалы мы получаем так называемый метрический граф. Здесь метрика понимается в смысле геодезической метрики, т.е. как кратчайшее расстояние по ребрам графа между двумя точками графа. Понятно, что такая структура является одномерным, тогда как реалистические разветвленные структуры двумерные (например, графенные нанотрубки) или трехмерные. Поэтому возникает вопрос о целесообразности моделирования реальных проблем техники и физики с помощью метрических графов. В работах [6, 9] исследована краевая задача для стационарного уравнения Шредингера в тонких (с малыми поперечными сечениями) разветвленных областях. Доказано, что когда диаметр поперечного сечения стремится к нулю, решение рассматриваемой задачи стремится к решению краевой задачи на соответствующем квантовом (метрическом) графе. При этом, из уравнение Шредингера в малой области точки разветвления, которая переходит в вершину графа при пределе, получатся условия Кирхгоффа. Этот результат остается справедливым и в случае уравнения теплопроводности, в силу того, что уравнение теплопроводности с помощью преобразования Лапласа по времени переходит в стационарное уравнение Шредингера.

\*Эшимбетов М. Р., Эргашов Р. Э. – Национальный университет Узбекистана, mr.eshimbetov92@mail.ru, rozimurodergashov357@gmail.com

Ещё одно обоснование моделирования процесса теплопроводности в разветвленных областях посредством метрических графов можно найти в работе [14]. Также, в этой работе методом Фокаса получена решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на компактном звездообразном графе.

В данной работе мы обобщаем метод унифицированного преобразования Фокаса [10]-[15] для решения уравнения теплопроводности на случай некоторые других простых метрических графов. Основной целью работы является показать преимущества и простоту использования вышесказанного метода для решения начально-краевых задач на метрических графах. В начале мы даем постановку задачи и некоторые предварительные результаты, которые получены в работах [7, 8, 11, 15,16].

### Постановка задачи и предварительные результаты

Пусть  $\Gamma = E \cup V$  - связанный метрический граф, где  $E = \{b_j\}_{j=1}^n$  - множество ребер, а  $V = \{\nu_j\}_{j=1}^m$  - множество вершин графа [3]. Определяем координаты  $x_j$  на ребрах графа с помощью изометрического отображения этих ребер на интервалы  $(0, L_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Мы будем говорить, что вершина  $\nu$  соприкасается ребра  $b_j$ , если это вершина является концом данного ребра и обозначаем это как  $b_j \sim \nu$ . Количество элементов множества  $\{b : b \sim \nu, b \in E\}$  назовем валентностью вершины  $\nu$ . Если валентность вершины равна единице, то она называется граничной. Пусть  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m_1}\} = \partial\Gamma \subset V$  - граничные вершины графа. Далее, не нарушая общности, мы будем использовать  $x$  вместо  $x_j$ .

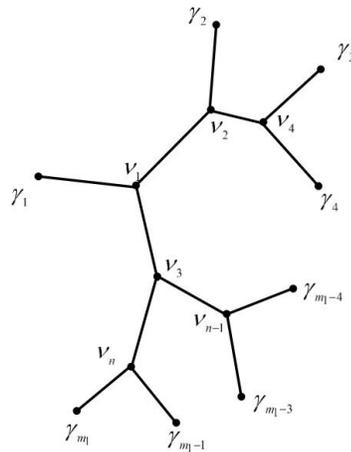


Рис. 1.  $\Gamma$  метрический граф

В каждом ребре графа рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t^{(j)}(x, t) = u_{xx}^{(j)}(x, t), x \in b_j, t > 0, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Потребуем, что бы решение уравнения (1) удовлетворяло начальному условию

$$u^{(j)}(x, 0) = u_0^{(j)}(x), j = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

В точках разветвление (т.е. в не граничных вершинах) графа решение должна удовлетворит следующим условиям склеивания

а) значения на вершине  $\nu$  всех функций  $u^{(j)}$ , для которых  $b_j \sim \nu$ , одинаковы;

б) сумма односторонних производных на каждой вершине  $\nu$  всех функций  $u^{(j)}$ , для которых  $b_j \sim \nu$ , равна нулю:

$$\sum_{b_j \sim \nu} \left. \frac{\partial u^{(j)}(x, t)}{\partial x} \right|_{\nu} = 0, \nu \in V \setminus \partial\Gamma, t \in [0, T]. \quad (3)$$

Первое из этих условий называется условием непрерывности решения на вершине, а второе условием сохранения потока. Эти условия ещё называются условиями Кирхгоффа, а иногда условиями типа  $\delta$  на вершине.

На граничных вершинах графа потребуем выполнения следующих граничных условий:

$$u^{(j)}(x, t)|_{\nu} = g_0^{(j)}(t) \text{ если } x_j = 0 \text{ на вершине } \nu,$$

$$u^{(j)}(x, t)|_{\nu} = h_0^{(j)}(t), \text{ если } x_j = L_j \text{ на вершине } \nu, b_j \sim \nu. \quad (4)$$

Начальные данные  $u_0^{(j)}, j = \overline{1, n}$ , удовлетворяют условиям склеивания на не граничных вершинах графа и условиям согласования на граничных вершинах.

Далее этом разделе мы дадим несколько примеров использования метода унифицированного преобразования Фокаса. Начнем с простого случая приведенный в работе [11].

**Уравнение теплопроводности на полупрямой** Рассмотрим начально краевую задачу для уравнения (1) в полупрямой (см. [10, 11]). Требуется найти решение уравнения  $u_t = u_{xx} + f(x, t)$  в области  $\{(x, t) : x > 0, t > 0\}$ , являющиеся непрерывным в замыкание этой области и удовлетворяющее начальному условию  $u(x, 0) = u_0(x), x \geq 0$ , краевому условию  $u(0, t) = h(t), t \geq 0$ . Предполагается, что начальное и граничные данные достаточно гладкие функции и  $u_0(0) = h(0)$ .

Метод Фокаса включает три этапа. Первый шаг идентичен процедуре, используемой для реализации обычных преобразований, тогда как третий шаг включает в себя только алгебраические преобразования. Второй шаг требует использования теоремы Коши и леммы Жордана.

1. Глобальным соотношением назовем уравнение, которое связывает неизвестное решение с ее значениями и значениями ее производных на границе области.

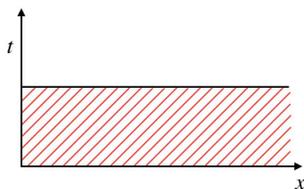


Рис. 2.

В нашем случае это соотношение получается умножением уравнения на  $e^{i(\lambda x + wt)}$ , интегрированием по области и далее применением формулы Грина. Здесь диффузионное соотношение имеет вид  $w = \lambda^2$ . После несложных преобразований, легко получим

$$e^{\lambda^2 t} \hat{u}(-i\lambda, t) = \hat{u}_0(-i\lambda) - \tilde{g}_1(\lambda^2, t) - i\lambda \tilde{g}_0(\lambda^2, t), \text{Im} \lambda \leq 0, \quad (5)$$

где

$$\widehat{u}(-i\lambda, t) = \int_0^\infty e^{-i\lambda x} u(x, t) dx, \quad t > 0, \quad \text{Im}\lambda \leq 0, \quad (6)$$

$$\widehat{u}_0(-i\lambda) = \int_0^\infty e^{-i\lambda x} u_0(x) dx, \quad t > 0, \quad \text{Im}\lambda \leq 0, \quad (7)$$

$$\widetilde{g}_0(\lambda, t) = \int_0^t e^{\lambda\tau} g_0(\tau) d\tau, \quad \widetilde{g}_1(\lambda, t) = \int_0^t e^{\lambda\tau} g_1(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (8)$$

с

$$g_1(t) = u_x(0, t), \quad g_0(t) = u(0, t), \quad t > 0. \quad (9)$$

Отметим, что

$$|e^{-i\lambda x}| = |e^{-i\lambda_R x + \lambda_I x}| = e^{\lambda_I x},$$

Таким образом, эти выражения ограничены при  $x \rightarrow \infty$  для всех  $\lambda_I < 0$ .

Функции  $\widetilde{g}_0$  и  $\widetilde{g}_1$  определены для всех комплексных значений  $\lambda$ , тогда как  $\widehat{u}$  и  $\widehat{u}_0$  определены для  $\text{Im}\lambda \leq 0$ , поэтому глобальное соотношение (5) справедливо для  $\text{Im}\lambda \leq 0$ .

Заметим, что глобальное соотношение (5) можно, также, получить использованием преобразование Фурье, определенной по формуле (6).

**2.** В этом этапе мы должны получить интегральное представление решения.

Для уравнения теплопроводности, определенной на полуоси, это интегральное представление имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x - \lambda^2 t} \widehat{u}_0(-i\lambda) d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\lambda x - \lambda^2 t} [\widetilde{g}_1(\lambda^2, t) + i\lambda \widetilde{g}_0(\lambda^2, t)] d\lambda, \quad (10)$$

где контур  $\partial D^+$  является границей области  $D^+$ , определенной как  $D^+ = \{\text{Im}\lambda \geq 0, \text{Re}\lambda^2 < 0\}$ , (см. рис. 3.).

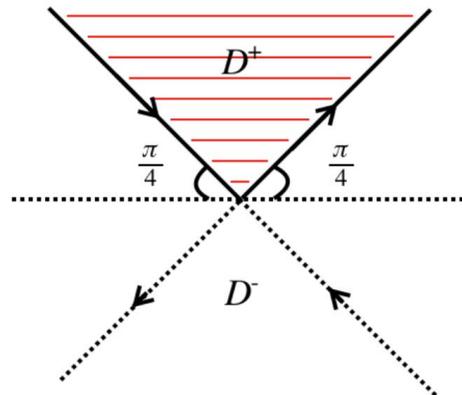


Рис. 3. Область  $D^+$  для уравнения теплопроводности.

Действительно, решая глобальное соотношение (5) относительно  $\widehat{u}(-i\lambda, t)$ , а затем используя формулу обратного преобразования Фурье, мы находим выражение, похожее на

(10), но с контуром интегрирования вдоль вещественной оси вместо  $\partial D^+$ . Чтобы перейти от интеграла по вещественной оси к  $\partial D^+$ , мы будем использовать теорему Коши и лемму Жордана.

Сначала рассмотрим функцию

$$e^{i\lambda x - \lambda^2 t} \tilde{g}_1(\lambda^2, t) = e^{i\lambda x} \int_0^t e^{-\lambda^2(t-\tau)} g_1(\tau) d\tau,$$

которая является голоморфной функцией  $\lambda$ . Это равенство включает в себя две экспоненты

$$e^{i\lambda x} = e^{i\lambda_{Rx} - \lambda_{Ix}x}, \quad e^{-\lambda^2(t-\tau)} = e^{-Re(\lambda^2)(t-\tau) - iIm(\lambda^2)(t-\tau)}.$$

Поскольку  $x \geq 0$  и  $t - \tau \geq 0$ , вышеуказанные экспоненты ограничены при  $Im\lambda \geq 0$  и  $Re\lambda^2 \geq 0$ . Кроме того, при выполнении этих условий, использованием формулы интегрирования по частям, легко получить, что указанная выше функция имеет порядок  $O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ :

$$e^{-\lambda^2 t} \int_0^t e^{\lambda^2 \tau} g_1(\tau) d\tau \sim \frac{g_1(t)}{\lambda^2}, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Таким образом, из теоремы Коши для области, ограниченной линией  $|Re(\lambda)| = R$  и  $\partial D^+$ , и использованием леммы Жордана при  $R \rightarrow +\infty$ , легко следует, что интеграл по вещественной прямой может быть заменен на интеграл по контуру  $\partial D^+$ .

Аналогичные утверждения верны для интеграла от функции  $i\lambda e^{i\lambda x - \lambda^2 t} \tilde{g}_0(\lambda^2, t)$ .

**3.** В этом этапе, использованием заданных граничных условий, и использованием глобального соотношения, а также некоторых инвариантных преобразования, надо исключить из выше приведенного интегрального представления неизвестные граничные значения.

Наше глобальное соотношение определено в  $Im\lambda \leq 0$ , но при этом нам надо найти  $\tilde{g}_1$  в  $\lambda \in \partial D^+$  в котором  $Im\lambda \geq 0$ .

Заметим, что замена  $\lambda$  на  $-\lambda$  имеет следующие два свойства: первое, при этом отображение множество  $Im\lambda \leq 0$  переходит к множеству  $Im\lambda \geq 0$ , и второе, выражение  $\tilde{g}_0(\lambda^2, t)$  и  $\tilde{g}_1(\lambda^2, t)$  при этом не меняются. Воспользовавшись этой заменой, имеем

$$\tilde{g}_1(\lambda^2, t) = i\lambda \tilde{g}_0(\lambda^2, t) + \hat{u}_0(i\lambda) - e^{\lambda^2 t} \hat{u}(i\lambda, t), \quad Im\lambda \geq 0. \quad (11)$$

При подстановке в интегральном представлении (10), слагаемое  $e^{\lambda^2 t} \hat{u}(i\lambda, t)$  дает нам интеграл

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\lambda x} \hat{u}(i\lambda, t) d\lambda, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0.$$

Функции  $e^{\lambda x}$  и  $\hat{u}(i\lambda, t)$  обе ограничены и голоморфные в верхней полуплоскости, и

$$\hat{u}(i\lambda, t) = \int_0^\infty e^{i\lambda x} u(x, t) dx \sim -\frac{u(0, t)}{i\lambda}, \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Тогда, согласно теореме Коши и лемме Жордана, этот интеграл равен нулю.

Таким образом, из (10) и (11) получим решение нашей задачи в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x - \lambda^2 t} \widehat{u}_0(-i\lambda) d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\lambda x - \lambda^2 t} [2i\lambda \widetilde{g}_0(\lambda^2, t) + \widehat{u}_0(i\lambda)] d\lambda. \quad (12)$$

**Решение уравнения теплопроводности на конечном интервале методом Фокаса** Теперь покажем применение метода Фокаса для уравнения теплопроводности на конечном интервале  $0 < x < L$ . Приступим к реализации шагов 1, 2 и 3, приведенных в предыдущем разделе.

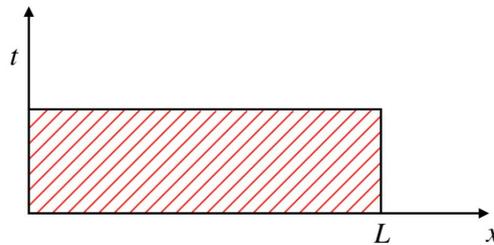


Рис. 4.

**Шаг 1.** Аналогичными действиями как показано выше, имеем следующее глобальное соотношение

$$e^{\lambda^2 t} \widehat{u}(-i\lambda, t) = \widehat{u}_0(-i\lambda) - \widetilde{g}_1(\lambda^2, t) - i\lambda \widetilde{g}_0(\lambda^2, t) + e^{-i\lambda L} [\widetilde{h}_1(\lambda^2, t) + i\lambda \widetilde{h}_0(\lambda^2, t)], \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (13)$$

где  $\widehat{u}$  и  $\widehat{u}_0$  - "преобразования Фурье на конечном интервале" [11, 13] для функций  $u(x, t)$  и  $u_0(x)$ , определенные как

$$\widehat{u}(-i\lambda, t) = \int_0^L e^{-i\lambda x} u(x, t) dx, \quad \widehat{u}_0(-i\lambda) = \int_0^L e^{-i\lambda x} u_0(x) dx, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (14)$$

$\widetilde{g}_1$ ,  $\widetilde{g}_0$  определены в (8) и  $\widetilde{h}_1$ ,  $\widetilde{h}_0$  определяются как

$$\widetilde{h}_0(\lambda, t) = \int_0^t e^{\lambda \tau} h_0(\tau) d\tau, \quad \widetilde{h}_1(\lambda, t) = \int_0^t e^{\lambda \tau} h_1(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (15)$$

где  $h_0(t) = u(L, t)$ ,  $h_1(t) = u_x(L, t)$ ,  $t > 0$ .

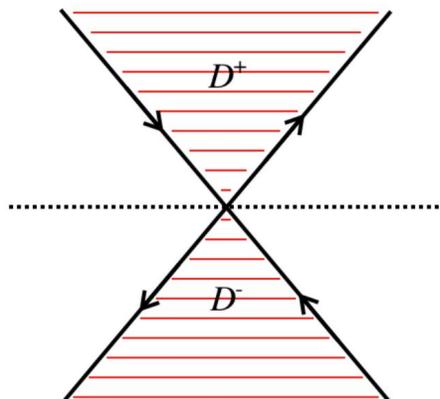


Рис. 5. Области  $D^+$  и  $D^-$  для уравнения теплопроводности.

**Шаг 2.** Из соотношение (13) для  $\hat{u}(-i\lambda, t)$ , с использованием формулы обратного преобразования Фурье (см. гл. 6-8 в [11], гл. 7 в [13]), а также, переходом из интегрирования по действительной оси к интегралам по контуру  $\partial D^+$ , в интеграле включающем  $\tilde{g}_1, \tilde{g}_0$  и по контуру  $\partial D^-$ , в интеграле включающий  $\tilde{h}_1, \tilde{h}_0$ , находим

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x - \lambda^2 t} \hat{u}_0(-i\lambda) d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\lambda x - \lambda^2 t} [\tilde{g}_1 + i\lambda \tilde{g}_0] d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} e^{-i\lambda(L-x) - \lambda^2 t} [\tilde{h}_1 + i\lambda \tilde{h}_0] d\lambda, \tag{16}$$

где  $D^-$  - область, симметричная к  $D^+$  относительно вещественной оси (см. Рис. 5.).

**Шаг 3.** Преобразование  $\lambda \rightarrow -\lambda$  вместе с глобальным соотношением (13) дает два уравнения. Поскольку существует четыре неизвестных граничных значения (по два на каждом конце области), нам нужны два граничных условия. Известно, что согласно теории начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, эти граничные условия можно задавать разными способами.

В качестве примера рассмотрим первую краевую задачу с граничными условиями

$$u(0, t) = g_0(t), \quad u(L, t) = h_0(t), \quad t \geq 0.$$

Глобальное соотношение (13) перепишем в виде

$$e^{\lambda^2 t} \hat{u}(-i\lambda, t) = G(\lambda, t) - \tilde{g}_1 + e^{-i\lambda L} \tilde{h}_1, \tag{17}$$

где  $G$  известная функция, определенная как

$$G(\lambda, t) = \hat{u}_0(-i\lambda) - i\lambda \tilde{g}_0(\lambda^2, t) + i\lambda e^{-i\lambda L} \tilde{h}_0(\lambda^2, t). \tag{18}$$

Заменяя  $\lambda$  на  $-\lambda$  в (17), получим

$$e^{\lambda^2 t} \hat{u}(i\lambda, t) = G(-\lambda, t) - \tilde{g}_1 + e^{i\lambda L} \tilde{h}_1. \tag{19}$$

Из (17) и (19), имеем

$$\tilde{g}_1 = \frac{1}{e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}} \{ e^{i\lambda L} G(\lambda, t) - e^{-i\lambda L} G(-\lambda, t) +$$

$$+e^{\lambda^2 t} [e^{-i\lambda L} \widehat{u}(i\lambda, t) - e^{i\lambda L} \widehat{u}(-i\lambda, t)] \}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{h}_1 = & \frac{1}{e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}} \{G(\lambda, t) - G(-\lambda, t) + \\ & + e^{\lambda^2 t} [\widehat{u}(i\lambda, t) - \widehat{u}(-i\lambda, t)] \}. \end{aligned} \quad (21)$$

Далее, подставим полученные выражения для  $\widetilde{g}_1$  и  $\widetilde{h}_1$  в (16). При этом, интегралы, содержащие  $\widehat{u}(\pm i\lambda, t)$  в полученном выражении обращаются в нуль. Покажем, что это действительно так.

Пусть  $\text{Im } \lambda \geq 0$ . Тогда, согласно правилу Лопиталья, выражение

$$\frac{e^{-i\lambda L} \widehat{u}(i\lambda, t) - e^{i\lambda L} \widehat{u}(-i\lambda, t)}{e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}}$$

эквивалентно выражению

$$-\widehat{u}(i\lambda, t) + e^{i\lambda L} \int_0^L e^{i\lambda(L-x)} u(x, t) dx$$

при  $\lambda \rightarrow \infty$  по любому направлению в  $\text{Im } \lambda \geq 0$ , которое является ограниченной.

Аналогично, в случае  $\text{Im } \lambda \leq 0$  выражение

$$\frac{\widehat{u}(-i\lambda, t) - \widehat{u}(i\lambda, t)}{e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}},$$

эквивалентно ограниченному выражению

$$\int_0^L e^{-i\lambda(L-x)} u(x, t) dx - e^{-i\lambda L} \widehat{u}(i\lambda, t),$$

при  $\lambda \rightarrow \infty$  по любому направлению в  $\text{Im } \lambda \leq 0$ .

Также, заметим, что знаменатель этих выражений  $e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}$  имеет только действительные нули и соответственно, не имеет нулей в  $D^\pm$ , кроме  $\lambda = 0$ . Но это сингулярность является устранимой, так что, мы можем считать эти выражения ограничены в  $D^+$  и  $D^-$ , соответственно. Это и доказывает наше утверждение.

Таким образом, мы получаем решение задачи в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x - \lambda^2 t} \widehat{u}_0(\lambda) d\lambda - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{i\lambda x - \lambda^2 t} \left[ i\lambda \widetilde{g}_0(\lambda^2, t) + \frac{e^{i\lambda L} G(\lambda, t) - e^{-i\lambda L} G(-\lambda, t)}{e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}} \right] d\lambda - \end{aligned} \quad (22)$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} e^{i\lambda x - \lambda^2 t} \left[ i\lambda \tilde{h}_0(\lambda^2, t) + \frac{G(\lambda, t) - G(-\lambda, t)}{e^{i\lambda L} - e^{-i\lambda L}} \right] d\lambda.$$

**Звездообразный граф с конечными и полубесконечными ребрами**

В этом параграфе мы приведем наш результат для звездообразного графа из работы [7-8]. Рассмотрим метрический граф, который состоит из  $n$  конечных ребер  $b_1, b_2, \dots, b_n$  и  $m$  полубесконечных ребер  $b_{n+1}, b_{n+2}, \dots, b_{n+m}$  имеющих общую вершину  $O$ , называемой вершиной графа. Координаты на каждом ребре определяем следующими соотношениями  $b_j \sim (0, L_j)$ , для  $j = \overline{1, n}$  и  $B_r \sim (0, +\infty)$ , для  $r = \overline{n+1, n+m}$ . Здесь вершина графа соответствует к 0 на каждом ребре графа (Рис. 6).

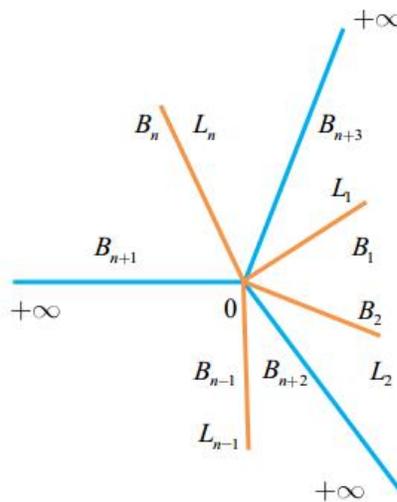


Рис. 6.

В полубесконечных ребрах потребуем выполнения асимптотических условий

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u^{(r)}(x, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (r = \overline{n+1, n+m}) \tag{23}$$

В этом случае глобальное соотношение для каждого решения будет таким же как и выше рассмотренных случаях. С учетом граничных, начального и условий на вершине, из глобальных соотношений мы получим систему из  $2n + m$  уравнений относительно  $2n + m$  граничных значений. Основная матрица этой системы уравнений имеет нули действительной оси, кроме  $\lambda = 0$ , которая приведет к устранимой особенности в интегральном выражении и может быть не учтено. Далее, аналогичными действиями как и выше, можно найти решение задачи.

**Теорема 1.** Решение исследуемой начально-краевой задачи имеет вид

$$u^{(j)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx - wt} u_0^{(j)}(k) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_R^-} \frac{e^{ikx - ikL_j - wt} \widehat{u}_0^{(j)}(k) - \widehat{u}_0^{(j)}(-k) - 2ik\sigma^2 \tilde{g}_0(w, t)}{A_j} dk - \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_R^+} e^{ikx-wt} \frac{e^{ikL_j} \widehat{u}_0^{(j)}(k) - e^{-ikL_j} \widehat{u}_0^{(j)}(-k) + 2ik\sigma^2 h_0^{(j)}(w, t)}{A_j} dk, \quad (j = \overline{1, n}), \\
& u^{(r)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt} \widehat{u}_0^{(r)}(k) dk - \\
& \quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx-wt} \widehat{u}_0^{(r)}(-k) dk - \\
& \quad - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx-wt} ik\sigma^2 \widetilde{g}_0(w, t) dk, \quad (r = \overline{n+1, n+m}).
\end{aligned} \tag{25}$$

Здесь,

$$\begin{aligned}
& ik\sigma^2 \widetilde{g}_0(w, t) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \delta_j^2 \frac{B_j}{A_j} + \sum_{r=n+1}^{n+m} \delta_r^2} \cdot \\
& \cdot \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j^2}{A_j} \left[ e^{ikL_j} \widehat{u}_0^{(j)}(k) - e^{-ikL_j} \widehat{u}_0^{(j)}(-k) + 2ik\sigma^2 h_0^{(j)}(w, t) \right] + \sum_{r=n+1}^{n+m} \delta_r^2 \widehat{u}_0^{(r)}(k) \right], \\
& A_j = e^{ikL_j} - e^{-ikL_j}, \quad B_j = e^{ikL_j} + e^{-ikL_j}, \quad (j = \overline{1, n}).
\end{aligned}$$

**Доказательство теоремы.** Рассмотрим следующее локальное соотношение

$$\left( e^{-ikx+wt} u^{(j)}(x, t) \right)_t = \left( \sigma^2 e^{-ikx+wt} \left( u_x^{(j)}(x, t) + ik u^{(j)}(x, t) \right) \right)_x, \tag{26}$$

где  $w(k) = (\sigma k)^2$ ,  $(j = \overline{1, n+m})$ .

Интегрируя по области  $(0, L_j) \times (0, t)$ ,  $(j = \overline{1, n})$  и применяя теорему Грина, находим (см. рис. 6.)

$$\begin{aligned}
& \int_0^{L_j} e^{-ikx+wt} u^{(j)}(x, t) dx - \int_0^{L_j} e^{-ikx} u^{(j)}(x, 0) dx = \\
& = \int_0^t e^{-ikL_j+ws} \sigma^2 \left( u_x^{(j)}(L_j, s) + ik u^{(j)}(L_j, s) \right) ds - \\
& \quad - \int_0^t e^{ws} \sigma^2 \left( u_x^{(j)}(0, s) + ik u^{(j)}(0, s) \right) ds,
\end{aligned} \tag{27}$$

где  $k \in \mathbb{C}$ ,  $(j = \overline{1, n})$ .

Можно отметить, что эта процедура эквивалентна применению преобразования Фурье к уравнению (1).

Для  $k \in \mathbb{C}$  введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
& \widehat{u}^{(j)}(k, t) = \int_0^{L_j} e^{-ikx} u^{(j)}(x, t) dx; \quad \widehat{u}_0^{(j)}(k) = \int_0^{L_j} e^{-ikx} u_0^{(j)}(x) dx; \\
& h_1^{(j)}(w, t) = \int_0^t e^{ws} u_x^{(j)}(L_j, s) ds; \quad h_0^{(j)}(w, t) = \int_0^t e^{ws} u^{(j)}(L_j, s) ds; \\
& g_j(w, t) = \int_0^t e^{ws} u_x^{(j)}(0, s) ds; \quad g_0(w, t) = \int_0^t e^{ws} u^{(j)}(0, s) ds, \quad (j = \overline{1, n}).
\end{aligned}$$

Согласно предыдущим обозначениям, мы можем записать равенство (27), т.е. глобальные соотношения, в виде:

$$e^{wt}\widehat{u}^{(j)}(k, t) - \widehat{u}_0^{(j)}(k) = e^{-ikL_j}\sigma^2(h_1^{(j)}(w, t) + ikh_0^{(j)}(w, t)) - \sigma^2(g_j(w, t) + ikg_0(w, t)), \quad (j = \overline{1, n}), \quad (28)$$

где  $\{k \in \mathbb{C} : Imk > 0\}$ .

Однако дисперсионное соотношение  $w = (\sigma k)^2$  инвариантно относительно замены  $k \rightarrow -k$  поэтому функции  $g_0(w, t)$ ,  $g_j(w, t)$ ,  $h_1^{(j)}(w, t)$ ,  $h_0^{(j)}(w, t)$ ,  $(j = \overline{1, n})$  также будут инвариантными. Следовательно, из (28) имеем:

$$e^{wt}\widehat{u}^{(j)}(-k, t) - \widehat{u}_0^{(j)}(-k) = e^{ikL_j}\sigma^2(h_1^{(j)}(w, t) - ikh_0^{(j)}(w, t)) - \sigma^2(g_j(w, t) - ikg_0(w, t)), \quad (j = \overline{1, n}), \quad (29)$$

где  $\{k \in \mathbb{C} : Imk < 0\}$ .

Используя обратное преобразование Фурье в глобальном соотношении (28) мы можем записать решение в следующем виде:

$$u^{(j)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt}\widehat{u}_0^{(j)}(k)dk + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-ikL_j-wt}\sigma^2(h_1^{(j)}(w, t) + ikh_0^{(j)}(w, t))dk - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt}\sigma^2(g_j(w, t) + ikg_0(w, t))dk, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (30)$$

Область  $D$  показана на рисунке 5. Подынтегральное выражение второго интеграла в (30) является целым и убывает при  $k \rightarrow \infty$  для  $k \in \mathbb{C}^- \setminus D^-$ . Третий интеграл имеет подынтегральное выражение, которое является целым и убывает при  $k \rightarrow \infty$  для  $k \in \mathbb{C}^+ \setminus D^+$ . Используя непрерывность подынтегрального выражения и применяя лемму Жордана, мы можем заменить контур интегрирования второго интеграла на  $-\int_{\partial D^-}$  и контур третьего интеграла - на  $\int_{\partial D^+}$  (см [10,15,17]):

$$u^{(j)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt}\widehat{u}_0^{(j)}(k)dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^-} e^{ikx-ikL_j-wt}\sigma^2(h_1^{(j)}(w, t) + ikh_0^{(j)}(w, t))dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx-wt}\sigma^2(g_j(w, t) + ikg_0(w, t))dk, \quad (j = \overline{1, n}), \quad (31)$$

где  $D^\pm = \{k \in \mathbb{C}^\pm : Re k^2 < 0\}$ ,  $\mathbb{C}^+ = \{k \in \mathbb{C} : Imk > 0\}$ ,  $\mathbb{C}^- = \{k \in \mathbb{C} : Imk < 0\}$  [10,13].

Теперь запишем следующее равенство, используя формулу Грина для области  $(0, +\infty) \times (0, t)$

$$0 = \int_0^{+\infty} e^{-ikx}u_0^{(r)}(x)dx - \int_0^{+\infty} e^{-ikx+wt}u^{(r)}(x, t)dx -$$

$$- \int_0^t \sigma^2 e^{ws} (u_x^{(r)}(0, s) + ik u^{(r)}(0, s)) ds, \quad (r = \overline{n+1, n+m}). \quad (32)$$

Для  $k \in \mathbb{C}$  положим

$$g_0(w, t) = \int_0^t e^{ws} u^{(r)}(0, s) ds, \quad g_r(w, t) = \int_0^t e^{ws} u_x^{(r)}(0, s) ds,$$

$$\widehat{u}^{(r)}(k, t) = \int_0^{+\infty} e^{-ikx} u^{(r)}(x, t) dx,$$

$$\widehat{u}_0^{(r)}(k) = \int_0^{+\infty} e^{-ikx} u_0^{(r)}(x) dx, \quad (r = \overline{n+1, n+m}).$$

В терминах предыдущих обозначений мы можем записать соотношение (32) в виде:

$$\widehat{u}_0^{(r)}(k) - e^{wt} \widehat{u}^{(r)}(k, t) - ik \sigma^2 g_0(w, t) - \sigma^2 g_r(w, t) = 0, \quad (r = \overline{n+1, n+m}), \quad (33)$$

где  $\{k \in \mathbb{C} : \text{Im} k > 0\}$ .

Отношение дисперсии  $w = (\sigma k)^2$  инвариантно относительно подстановки  $k \rightarrow -k$  поэтому функции  $g_0(w, t)$ ,  $g_r(w, t)$ ,  $(r = \overline{n+1, n+m})$  также будут инвариантными относительно этой замены. Следовательно, из (33) имеем:

$$\widehat{u}_0^{(r)}(-k) - e^{wt} \widehat{u}^{(r)}(-k, t) + ik \sigma^2 g_0(w, t) - \sigma^2 g_r(w, t) = 0, \quad (r = \overline{n+1, n+m}). \quad (34)$$

А теперь применим преобразование Фурье в глобальном соотношении (33)

$$u^{(r)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - wt} \widehat{u}_0^{(r)}(k) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - wt} (ik \sigma^2 g_0(w, t) + \sigma^2 g_r(w, t)) dk. \quad (35)$$

Подынтегральное выражение второго интеграла в (35) является целым и убывает при  $k \rightarrow \infty$  для  $k \in \mathbb{C}^+ \setminus D^+$ . Используя непрерывность подынтегрального выражения и применяя лемму Жордана, мы можем заменить контур интегрирования второго интеграла на  $-\int_{\partial D^-}$  (см [10, 11]):

$$u^{(r)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - wt} \widehat{u}_0^{(r)}(k) dk - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^+} e^{ikx - wt} (ik \sigma^2 g_0(w, t) + \sigma^2 g_r(w, t)) dk, \quad (36)$$

где  $(r = \overline{n+1, n+m})$ .

Нам нужно найти неизвестные  $h_1^{(j)}(w, t)$ ,  $g_j(w, t)$ ,  $g_0(w, t)$ ,  $(j = \overline{1, n+m})$  в этом представлении решения. Теперь, используя условия в вершине графа, получаем

$$\begin{cases} e^{wt}\widehat{u}^{(j)}(k, t) - \widehat{u}_0^{(j)}(k) = e^{-ikL_j}\sigma^2(h_1^{(j)}(w, t) + ikh_0^{(j)}(w, t)) - \\ -\sigma^2(g_j(w, t) + ikg_0(w, t)), \\ e^{wt}\widehat{u}^{(j)}(-k, t) - \widehat{u}_0^{(j)}(-k) = e^{ikL_j}\sigma^2(h_1^{(j)}(w, t) - ikh_0^{(j)}(w, t)) - \\ -\sigma^2(g_j(w, t) - ikg_0(w, t)), \\ e^{wt}\widehat{u}^{(r)}(k, t) - \widehat{u}_0^{(r)}(k) = -\sigma^2(g_r(w, t) + ikg_0(w, t)), \\ \sum_{j=1}^{n+m} \delta_j^2 g_j(w, t) = 0, \end{cases} \quad (37)$$

где  $j = \overline{1, n}$ ,  $r = \overline{n+1, n+m}$ .

Решая эти уравнения относительно  $ik\sigma^2 g_0(w, t)$ , имеем

$$ik\sigma^2 g_0(w, t) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \delta_j^2 \frac{B_j}{A_j} + \sum_{r=n+1}^{n+m} \delta_r^2} \cdot \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j^2}{A_j} \left[ e^{ikL_j} \widehat{u}_0^{(j)}(k) - e^{-ikL_j} \widehat{u}_0^{(j)}(-k) + 2ik\sigma^2 h_0^{(j)}(w, t) - \right. \right. \\ \left. \left. - e^{wt} (e^{ikL_j} \widehat{u}^{(j)}(k, t) - e^{-ikL_j} \widehat{u}^{(j)}(-k, t)) \right] + \sum_{r=n+1}^{n+m} \delta_r^2 \left[ \widehat{u}_0^{(r)}(k) - e^{wt} \widehat{u}^{(r)}(k, t) \right] \right], \quad (38)$$

где  $A_j = e^{ikL_j} - e^{-ikL_j}$ ,  $B_j = e^{ikL_j} + e^{-ikL_j}$ , ( $j = \overline{1, n}$ ).

Теперь положим  $G^{(j)}(k, t) = \widehat{u}_0^{(j)}(k) - ik\sigma^2 g_0(w, t) + e^{-ikL_j} \cdot ik\sigma^2 h_0^{(j)}(w, t)$ , ( $j = \overline{1, n}$ ), тогда

$$\begin{cases} e^{wt}\widehat{u}^{(j)}(k, t) = G^{(j)}(k, t) - \sigma^2 g_j(w, t) + e^{-ikL_j} \sigma^2 h_1^{(j)}(w, t) \\ e^{wt}\widehat{u}^{(j)}(-k, t) = G^{(j)}(-k, t) - \sigma^2 g_j(w, t) + e^{ikL_j} \sigma^2 h_1^{(j)}(w, t) \end{cases}, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (39)$$

Итак, мы имеем

$$\begin{aligned} \sigma^2 g_j(w, t) &= \frac{1}{A_j} (e^{ikL_j} G^{(j)}(k, t) - e^{-ikL_j} G^{(j)}(-k, t)) - \\ &- \frac{1}{A_j} (e^{wt} (e^{ikL_j} \widehat{u}^{(j)}(k, t) - e^{-ikL_j} \widehat{u}^{(j)}(-k, t))); \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 h_1^{(j)}(w, t) &= \frac{1}{A_j} (G^{(j)}(k, t) - G^{(j)}(-k, t)) - \\ &- \frac{1}{A_j} (e^{wt} (\widehat{u}^{(j)}(k, t) - \widehat{u}^{(j)}(-k, t))), \quad (j = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (41)$$

Решая (34) относительно  $\sigma^2 g_r(w, t)$ , находим

$$\sigma^2 g_r(w, t) = \widehat{u}_0^{(r)}(-k) - e^{wt} \widehat{u}^{(r)}(-k, t) + ik\sigma^2 g_0(w, t), \quad (r = \overline{n+1, n+m}). \quad (42)$$

Положим (38), (40), (41) затем упростим, заметив что следующие интегралы

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D^\pm} e^{ikx} \widehat{u}^{(j)}(\mp k, t) dk, \quad (j = \overline{1, n+m})$$

обращаются в нуль (см [7, 8, 11]). Тогда получим решения задачи в виде (24) и (25).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Albert R., Barabasi A. L. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod.Phys.* A - 2002. - 74, № 4. - С. 62–76.
2. Cohen R., Havlin S. *Complex Networks: Structure, Robustness and Function*. Cambridge University Press. 2010.
3. Berkolaiko G. An elementary introduction to quantum graphs. *Contemporary Mathematics*. – 2017. Vol. 700. 14182. – P. 31.
4. Gnutzmann S., Smilansky U. *Adv.Phys.* 55 527 (2006).
5. Gnutzmann S., Keating J. P., Piotet F. *Ann.Phys.*, 325 2595 (2010).
6. Exner P., Post O. A General Approximation of Quantum Graph Vertex Couplings by Scaled Schrodinger Operators on Thin Branched Manifolds. *Commun. Math. Phys.*, 1322 207-227 (2013).
7. Khudayberganov G., Sobirov Z. A., Eshimbetov M. R. Unified transform (Fokas) method for the Schrodinger equation on simple metric graph. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. 2019 12(4), 412-420.
8. Khudayberganov G., Sobirov Z. A., Eshimbetov M. R. The Fokas' unified transformation method for heat equation on general star graph. *Uzbek Mathematical Journal*, 2019. № 1., Pp. 73–81.
9. Uecker H., Grieser D., Sobirov Z. A., Babajanov D., Matrasulov D. Soliton transport in tubular networks: Transmission at vertices in the shrinking limit. *Phys. Rev. E* 91, 023209, (2015).
10. Sheils N. E., Smith A. D. Heat equation on a network using the Fokas method. 2015 *J. Phys. A: Math. Theor.* 48 335001.
11. Fokas A. S., Pelloni B. *Unified Transform for Boundary Value Problems. Applications and Advances*. SIAM., USA. –2015. –P. 293.
12. Fokas A. S. A unified transform method for solving linear and certain nonlinear PDEs. In *Proc. R. Soc. A*, volume 453, Pp. 1411–1443. The Royal Society, 1997.
13. Fokas A. S. *A Unified Approach to Boundary Value Problems*. 2008. Pp. 352.
14. Sheils N. E. Multilayer diffusion in a composite medium with imperfect contact. *Applied Mathematical Modelling*. – 2017. Vol. 46. –P. 450–464.
15. Sobirov Z. A., Eshimbetov M. R. The Fokas' unified transformation method for Airy equation on open simple star graph. *Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences*. – 2020. Vol. 3. №4. – p. 438–447.

16. Eshimbetov M. R. Initial-boundary value problem for heat equation on ladder-type graphs. Bulletin of the Institute of Mathematics. – 2020. №5. – p. 11–19.
17. Собиров З. А., Эшимбетов М. Р. Метод Фокаса для уравнения теплопроводности на метрических графах. СМФН, 67:4 (2021), 766–782

### REZYUME

Ushbu maqolada yulduzsimon metrik graflarda diffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masalaning yechimini qurish usuli ko'rsatib o'tilgan. Umumlashgan Fure almashtirishi yordamida qaralayotgan masala grafning tarmoqlanish nuqtalaridagi yechimning va uning hosilasining qiymatlariga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Bu tenglamalar sistemasi masaladagi berilganlarga nisbatan yagona yechim topiladi.

**Kalit so'zlar:** Issiqlik tarqalish tenglamasi, metrik graf, tarmoqlarning tuzilishi, Fokas metodi, umumlashgan Fure almashtirishi, Fure almashtirishi, boshlang'ich-chegaraviy masala.

### RESUME

The paper presents a method for constructing solutions to initial boundary value problems for the diffusion equation on metric graphs, such as a star-shaped graph with three convergent edges. Solutions to the problems are constructed using the so-called Fokas method, which is a generalization of the Fourier transform method. At the same time, the problem is reduced to a system of algebraic functions with respect to the Fourier transform of unknown solution values at the vertices of the graph.

**Key words:** Heat equation, metric graphs, branched structures, Fokas' method, unified transformation, Fourier transformation, initial problem, boundary value problem.