ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 197 (2021). С. 28–35
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-197-28-35

УДК 517.936, 517.925.53

СТАБИЛЬНОСТЬ ВПОЛНЕ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

© 2021 г. **А. Я. НАРМАНОВ**

Аннотация. Предметом настоящей работы является вопрос о стабильности вполне управляемых систем, заданных на гладком многообразии. Известно, что множества управляемости симметричных систем порождают сингулярные слоения. В случае, когда множества управляемости имеют одинаковую размерность, возникает регулярное слоение. Таким образом, возникает возможность применения методов теории слоений в задачах теории управления. В данной работе излагаются некоторые результаты о возможности применения теорем о стабильности слоев для задачи о стабильности вполне управляемых систем.

Ключевые слова: система управления, множество управляемости, орбита, вполне управляемая система, сингулярное слоение.

STABILITY OF COMPLETELY CONTROLLABLE SYSTEMS

© 2021 **A. Ya. NARMANOV**

Abstract. In this work, we discuss the stability of completely controllable systems defined on smooth manifolds. It is known that the controllability sets of symmetric systems generate singular foliations. In the case where the controllability sets have the same dimension, regular foliation arise. Thus, we can apply the methods of foliation theory to problems in control theory. In this paper, we present some results on the possibility of applying theorems on the stability of layers to the problem on the stability of completely controllable systems.

Keywords and phrases: control system, controllability set, orbit, completely controllable system, singular foliation.

AMS Subject Classification: 37C10, 57R27

1. Введение. В этой работе рассматривается система управления

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in M, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где M — связное гладкое (класса C^∞) многообразие размерности n, U — компакт, при каждом $u \in U$ векторное поле $f(\cdot, u)$ является гладким (класса C^∞), а отображение $f\colon M \times U \to TM$ непрерывно. Допустимыми управлениями считаются кусочно постоянные функции $u\colon [0, T] \to U$, где $0 < T < \infty$.

Траекторией системы (1) называется кусочно гладкое отображение $x\colon [0, T] \to M$, удовлетворяющее равенству

$$\dot{x} = f(x(t), u(t))$$

для всех $t \in [0, T] \setminus E$, где $u\colon [0, T] \to U$ — некоторое допустимое управление с множеством точек разрыва E, которое состоит из конечного числа точек.

Будем говорить, что из точки $x_1 \in M$ можно попасть в точку $x_2 \in M$ за время T, если существует такая траектория $x\colon [0, T] \to M$ системы (1), что $x(0) = x_1$ и $x(T) = x_2$.

Пусть $\eta \in M$. Множество точек M, из которых можно попасть в η, будем называть множеством управляемости с целевой точкой η и обозначим через G_η. По определению полагаем $\eta \in G_\eta$ для всех $\eta \in M$.

Пусть M — гладкое многообразие размерности n, D — семейство гладких векторных полей, заданных на многообразии M. Семейство D может содержать конечное и бесконечное число гладких векторных полей. Для точки $x \in M$ через $t \to X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку x при $t = 0$. Отображение $t \to X^t(x)$ определено в некоторой области $I(x)$, которая в общем случае зависит не только от поля X, но и от начальной точки x.

Определение 1. Орбита $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку x, определяется как множество таких точек y из M, для которых существуют такие действительные числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и векторные поля $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$ из D (где k произвольное натуральное число), что

$$y = X_{i_k}^{t_k}\Big(X_{i_{k-1}}^{t_{k-1}}\big(\ldots(X_{i_1}^{t_1}(x))\ldots\big)\Big).$$

Ясно, что орбита является гладкой кривой (одномерным многообразием), если D состоит из одного векторного поля.

В [19, 20] доказано, что каждая орбита семейства гладких векторных полей обладает дифференциальной структурой, по отношению которой она является гладким многообразием, гладко погруженным в M.

Напомним, что подмногообразие $N \subset M$ называется погруженным в M, если каноническая инъекция $i\colon N \to M$ является дифференцируемым отображением максимального ранга.

На каждой орбите возникают две топологии: ее собственная топология как погруженного подмногообразия и индуцированная топология из M. Собственная топология орбиты является более сильной, чем топология, индуцированная из M.

Действительно, если $x \in L(x_0)$, где $x \in M$, $V(x)$ — открытое множество в M, содержащее x, то $L(x_0) \cap V(x)$ является открытым множеством в индуцированной топологии $L(x_0)$. Для каждой точки $y \in L(x_0) \cap V(x)$ образ точки y при $i\colon L(x) \to M$ содержится в $V(x)$, и в силу непрерывности отображения i существует окрестность $U(y)$ точки в топологии $L(x_0)$ такая, что $U(y) \subset V(x)$. Отсюда следует, что $L(x_0) \cap V(x)$ открыто в топологии $L(x_0)$.

Как показывают примеры, даже когда D состоит из одного векторного поля, эти две топологии не всегда совпадают.

Например, для иррациональной обмотки тора для всех траекторий эти топологии различны. Изучению геометрии и топологии орбит векторных полей посвящены многочисленные исследования (см. [1–9].

Определение 2. Орбита L называется собственной, если каноническая инъекция $i\colon L \to M$ является вложением, т.е. когда топология слоя совпадает с индуцированной топологией из M.

Орбиты семейства векторных полей класса C^r порождают сингулярное слоение класса C^r. Это следует из работ П. Стефана [19] и Г. Суссманна [20].

Пусть $V(M)$ — множество всех гладких (класса C^∞) векторных полей, определенных на M. Множество $V(M)$ является алгеброй Ли, в которой коммутатором двух векторных полей $X, Y \in V(M)$ служит их скобка Ли $[X, Y]$. Обозначим через $A(D)$ наименьшую подалгебру Ли, содержащую D, и положим $A_x(D) = \{X(x) : X \in A(D)\}$ для всех $x \in M$. Возникшее распределение $x \to A_x(D)$ является инволютивным, и если $\dim A_x(D) = \mathrm{const}$ для всех $x \in M$, то по теореме Фробениуса является вполне интегрируемым. В этом случае каждая орбита является слоем k-мерного слоения F (см. [3]).

Система управления (1) порождает семейство векторных полей

$$D = \{f(\cdot, u) : u \in U\}. \tag{2}$$

Если $u\colon [0, T] \to U-$ допустимое управление с точками разрыва $t_1, t_2, \ldots, t_m$, где $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < T$, и $x\colon [0, T] \to M$ — соответствующая траектория системы (1), то сужение x на

$[t_i, t_{i+1}]$, где $i = 0, 1, 2, \dots, m$, $t_0 = 0$, $t_{m+1} = T$, является интегральной кривой некоторого векторного поля X_{i+1} из D. Поэтому, если $x(0) = x_1$, $x(T) = x_2$, то имеет место равенство

$$x_2 = X_m^{\tau_m}\Big(X_{m-1}^{\tau_{m-1}}\big(\dots X_1^{\tau_1}(x_1)\dots\big)\Big), \tag{3}$$

где $\tau_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Следовательно, множество G_η является подмножеством орбиты $L(\eta)$ семейства D для каждого $\eta \in M$.

Определение 3. Система (1) называется симметричной, если для каждого $u \in U$ существует такое $v \in U$, что $f(x, v) = -f(x, u)$ для всех $x \in M$.

Очевидно, если система (1) симметрична, то множество G_η совпадает с орбитой $L(\eta)$ семейства D. Таким образом, множества управляемости симметричной системы управления (1) порождают сингулярное слоение F. Если $\dim A_x(D) = k$ для всех $x \in M$, то каждая орбита является слоем k-мерного слоения F (см. [20]).

Определение 4. Будем говорить, что система (1) управляема из точки η, если выполнено $G_\eta = L(\eta)$.

Определение 5. Будем говорить, что система (1) вполне управляема на $L(\eta_0)$, где $\eta_0 \in M$, если $G_\eta = L(\eta_0)$ для каждого $\eta \in L(\eta_0)$.

По определению орбиты, для каждого $\eta \in M$ множество $L(\eta)$ является инвариантным множеством системы (1), т.е. ни одна траектория системы (1), начинающаяся на нем, его не покидает. Поэтому, если целью управления является приведение системы (1) в точку $\eta \in M$, то систему достаточно рассматривать лишь на $L(\eta)$, так как из точек $M \setminus L(\eta)$ невозможно попасть в точку η.

Пусть $L = L(\eta_0)$ — некоторая орбита семейства D, и система (1) вполне управляема на L.

Рассмотрим вопрос о том, при каких условиях вполне управляемая на $L(\eta_0)$ система (1) будет вполне управляемой на орбитах $L(\eta)$, если точка η достаточно близка к η_0.

В случае, когда орбита L является компактным множеством, этот вопрос решен в [13]. В [13] доказано, что если слоение F регулярно, L — компактный слой с конечной группой голономии, то из вполне управляемости системы (1) на L вытекает, что система (1) вполне управляема на всех слоях, достаточно близких к L.

В этой работе мы рассмотрим этот вопрос, когда орбита $L(\eta_0)$ не является компактным множеством. Оказывается, этот вопрос тесно связан с вопросом о стабильности слоя L слоения F так же, как и непрерывность отображения $\eta \to L(\eta)$.

В разделе 2 обсуждаются теоремы стабильности для слоев слоения F. В разделе 3 получены достаточные условия «стабильности» вполне управляемой системы (1).

В разделе 4 рассматривается система управления, правая часть которой непрерывно зависит от некоторого параметра и изучается вопрос о достаточных условиях стабильности вполне управляемой системы относительно параметра.

2. Теоремы стабильности для слоений. Пусть F является k-мерным слоением. Следующая теорема о стабильности компактного слоя доказана Ж. Рибом в 1944 г. (см. [12]).

Теорема 1. *Пусть L — компактный слой слоения F. Если группа голономии слоя L конечна, то для каждого открытого множества V, содержащего L, существует открытое инвариантное множество V_0 такое, что $L \subset V_0 \subset V$, каждый слой из V_0 есть компакт и имеет конечную группу голономии.*

В 1976 г. на международной конференции в Рио-де-Жанейро Гектором был поставлен вопрос о возможности обобщения теоремы Риба на некомпактные слои (см. [18]).

В 1977 г. японский математик Т. Инаба построил пример, который показывает, что когда коразмерность слоения больше единицы, то теорема Ж. Риба нельзя обобщить для некомпактных собственных слоев (см. [15]). Таким образом, вопрос Гектора об обобщении теоремы Риба на некомпактные слои нужно рассмотреть только для слоений коразмерности один.

Пусть $\dim A_x(D) = n-1$ для всех $x \in M$. Тогда F является слоением размерности $n-1$ (коразмерности один).

Предположим, что слоения F трансверсально ориентируемо, т.е. существует невырожденное гладкое векторное поле X на M, которое трансверсально к слоям F.

Пусть L_0 — собственный слой слоения слоения F, и $r > 0$. Положим $U_r = \{y \in M : \rho(y, L_0) < r\}$, где $\rho(y, L_0)$ — расстояние от точки y до слоя L_0. Очевидно, что для каждого $r > 0$ множество U_r является открытым множеством.

В 1977 г. Т. Инаба в той же работе [15] доказал следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть M — компактное многообразие размерности 3, F — трансверсально ориентируемое слоение коразмерности один, L_0 — собственный слой F. Тогда, если фундаментальная группа слоя L_0 конечнопорожденна, и группа голономии $H(L_0)$ тривиальна, то для каждого $r > 0$ существует открытое инвариантное множество V такое, что $L_0 \subset V \subset U_r$, каждый слой из V диффеоморфен слою L_0, сужение F на V является расслоением со слоем L_0.*

Пусть L_0— — собственный слой слоения F. Предположим, что для каждой точки $x \in L_0$ существует такое число $r_x > 0$, что для каждой горизонтальной кривой $h\colon [0,1] \to U_{r_x} = \{z \in M : \rho(z, L_0) < r_x\}$ с началом в точке x, и для каждого пути $v\colon [0,1] \to L_0$ с началом в $x = h(0)$ существует непрерывное отображение (вертикально-горизонтальная гомотопия) $\psi\colon [0,1] \times [0,1] \to M$, такое, что $\psi(t, 0) = v(t)$ для $t \in [0,1]$, $\psi(0, s) = h(s)$ при $s \in [0,1]$.

Кривую $h\colon [0,1] \to M$ назовем горизонтальной, если $\frac{dh(s)}{ds} \in H(h(s))$, где $H(x) = \{\lambda X(x) : \lambda \in \mathbb{R}^1\}$, X — трансверсальное к F векторного поля на M.

При этом условии имеет место следующее обобщение теоремы Ж. Риба (см. [8]).

Теорема 3. *Пусть F — трансверсально ориентируемое слоение коразмерности один на M, L_0 — относительно компактный собственный слой с конечнопорожденной фундаментальной группой. Тогда, если группа голономии слоя L_0 тривиальна, то для каждого $r > 0$ существует открытое инвариантное множество V такое, что $L_0 \subset V \subset U_r$, каждый слой из V диффеоморфен слою L_0, а сужение F на V является расслоением над $\mathbb{R}^1$ со слоем L_0.*

Замечание 1. Компактный слой всегда вложен в M, т.е. является собственным слоем. Известно, что фундаментальная группа компактного многообразия является конечнопорожденной группой.

Далее предположим, что слоение является римановым.

Определение 6. Слоение F называется римановым, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой своей точке к слою слоения F, остается ортогональной ко всем слоям F во всех своих точках.

Регулярные римановы слоения введены Рейнхартом в [17] и изучались многими авторами, в частности, в [14, 16, 22]. Сингулярные римановы слоения были введены П. Молино в монографии [16].

Пусть (M, g) — риманово многообразие размерности n, F — сингулярное риманово слоение на M. В этом случае имеет место следующее обобщение теоремы Ж. Риба (см. [8]).

Теорема 4. *Пусть (M, g) — полное риманово многообразие размерности n, L-собственный слой слоения F. Тогда для каждого $r > 0$ существует открытая инвариантная окрестность V слоя L такая, что $L \subset V \subset U_r$ и сужение F на V является гладким расслоением с базой L.*

В случае, когда F — регулярное слоение коразмерности верна следующая теорема (см. [8]).

Теорема 5. *Пусть F является римановым слоением коразмерности один на полном римановом многообразии (M, g), L — компактный слой. Тогда для каждого открытого множества V, содержащего L, существует открытая инвариантная окрестность U слоя F такая, что $L \subset U \subset V$, и U состоит из компактных слоев, диффеоморфных L.*

3. Стабильность вполне управляемых систем. В этом параграфе с использованием результатов первого параграфа получены достаточные условия «стабильности» вполне управляемой системы (1). Допустимыми управлениями считаются кусочно постоянные функции, принимающие значения из U.

Теорема 6 (см. [13]). *Пусть L_0 — компактный слой слоения F с конечной группой голономии. Тогда, если система* (1) *вполне управляема на L_0, то она вполне управляема на слоях, достаточно близких к L_0.*

По теореме Ж. Риба, если L_0 — компактный слой с конечной группой голономии, то для каждого открытого множества V, содержащего L_0, существует открытое инвариантное множество U, такое, что $L_0 \subset U \subset V, U$ состоит из компактных слоев.

Таким образом, теорема Ж. Риба позволяет получить достаточное условие для локальной стабильности вполне управляемой системы в случае, когда L_0 — компакт.

Как показывают следующие примеры, это теорема неверна, если L_0 — некомпактный слой, или L_0 — компактный слой, группа голономии которого не является конечной группой.

Пример 1. Пусть $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ с декартовыми координатами x, y, семейство состоит из одного векторного поля

$$X(x,y) = ((1-\rho)x - y)\frac{\partial}{\partial x} + (x + (1-\rho)y)\frac{\partial}{\partial y},$$

где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

Окружность $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ является предельным циклом для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + (1-\rho)x, \\ \dot{y} = x + (1-\rho)y, \end{cases} \tag{4}$$

так как векторное поле X касается S^1 в каждой точке окружности S^1. Если в качестве компактного слоя L_0 возьмем S^1, то система (4) вполне управляема на L_0.

Другие траектории не замкнуты, поэтому система (4) не является вполне управляемой на других траекториях. Группа голономии слоя L_0 является циклической группой.

Пример 2. Пусть $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x_1,x_2,x_3) : x_1 = x_2 = 0\}$ с декартовыми координатами (x_1,x_2,x_3), $D = \{X_1, X_2, X_3\}$, где

$$X_1 = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_2 = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_3 = -\varphi(x)x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - \varphi(x)x_2\frac{\partial}{\partial x_2};$$

здесь $\varphi(x) = \psi((x_1^2+x_2^2)x_3^2)$, $\psi\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — такая гладкая функция класса C^∞, что $\psi(t) > 0$ при $-1 < t < 1$, и $\psi(t) = 0$ при $|t| \geqslant 1$.

Орбиты семейства D определяют двумерное слоение F на M, где для точки $\eta_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ орбита $L(\eta_0)$ совпадает с пересечением $M \cap \Pi(x_3^0)$, где $\Pi(x_3^0)$ — плоскость в $\mathbb{R}^3$, определяемая уравнением $x_3 = x_3^0$.

Рассмотрим систему управления

$$\dot{x} = f(x,u), \quad u \in U = \{u_1, u_2, u_3\}, \tag{5}$$

где $f(x,u_i) = X_i(x)$, $i = 1,2,3$.

Положим $B_1 = \{x \in M : X_3(x) \neq 0\}$, $B_2 = M \setminus B_1$. При $\eta_0 = (x_1^0, x_2^0, 0)$ слой $L(\eta_0)$ не пересекается с B_1, и поэтому система (5) вполне управляема на $L_0 = L(\eta_0)$.

Для каждого слоя L такого, что пересечение $L \cap B_2 \neq \varnothing$, из точек $L \cap B_2$ нельзя попасть в точки множества $L \cap B_1 \neq \varnothing$. Следовательно, система (5) не является вполне управляемой на слоях L, отличных от L_0. Группа голономии слоя L_0 тривиальна, но L_0 не является компактным слоем.

В примере 2 слой L_0, хотя не является относительно компактным, но является локально стабильным. Этот факт показывает, что если система (1) вполне управляема на слое L_0, удовлетворяющим заключению теоремы 3, то отсюда не вытекает вполне управляемость системы (1) на близких слоях. Поэтому в случае, когда L_0 — некомпактный слой, нужны дополнительные условия на систему (1), которые гарантировали бы «стабильность» вполне управляемой на L_0 системы (1).

Определение 7. Система управления (1) называется нормально-локально управляемой (короче N-локально управляемой) вблизи точки $p \in L(\eta)$, если по любому $T > 0$ существует такая окрестность V точки p в $L(\eta)$, что из каждой точки множества V можно попасть в точку p за время, меньшее T.

Определение 8. Будем говорить, что система (1) вполне управляема (или N-локально управляема) на инвариантном множестве $S \subset M$, если она вполне управляема (или N-локально управляема) на каждом слое из S.

Теорема 3 второго параграфа позволяет доказать следующую теорему (см. [8]).

Теорема 7. *Пусть* $\dim A_x(D) = n - 1$ *для всех* $x \in M$, *и* F *является трансверсально ориентируемым слоением, слой* L_0 *удовлетворяет условия теоремы 3. Тогда если система* (1) N*-локально управляема на* $\overline{L_0}$ *(замыкание в* M*), то существует инвариантная окрестность* V *слоя* L_0 *такая, что система* (1) *вполне управляема на каждом слое из* V.

Теперь вернемся к случаю $\dim A_x(D) = k$ для всех $x \in M$, где $0 < k < n$. В этом случае F является k-мерным слоением.

Предположим, что слоение F является римановым слоением по отношению к римановой метрике. Необходимое и достаточное условие того, чтобы F было римановым, дано в [6]. Это условие относится к векторным полям из $A(D)$ и римановой метрике g. В [8] получен следующий результат.

Теорема 8. *Пусть* (M, g) *— полное риманово многообразие,* L_0 *— относительно компактный слой слоения* F*. Тогда, если система* (1) N*-локально управляема на* $\overline{L_0}$*, то существует инвариантная окрестность* V *слоя* L_0 *такая, что на каждом слое из* V *система* (1) *вполне управляема.*

4. Стабильность вполне управляемых систем относительно параметра. Рассмотрим систему уравнений с параметром

$$\dot{x} = f(x, u, \alpha), \quad x \in M, \quad u \in U, \tag{6}$$

где M — гладкое (класса C^{r+1}) связное многообразие размерности n с некоторой римановой метрикой g, U — непустое компактное подмножество $\mathbb{R}^p$, параметр α принимает значения из некоторого открытого множества $A \subset \mathbb{R}^q$.

Предполагается, что при каждом $\alpha \in A$ отображение $f(\cdot, \cdot, \alpha)\colon M \times U \to TM$ непрерывно, а векторные поля $\{f(\cdot, u, \alpha) : u \in U\}$ принадлежат классу C^r, где TM — касательное расслоение многообразия M, $r \geqslant 1$.

Допустимыми управлениями считаются кусочно постоянные функции $u\colon [0, T] \to U$, где $0 < T < \infty$.

Пусть $\eta \in M$, $G_\eta(\alpha_0)$ — множество управляемости системы (6) с целевой точкой η при $\alpha = \alpha_0$, т.е. системы управления

$$\dot{x} = f(x, u, \alpha_0), \quad x \in M, \quad u \in U, \tag{7}$$

которая получена из (6), полагая $\alpha = \alpha_0$.

Напомним, что $G_\eta(\alpha_0)$ есть множество точек M, из которых можно попасть в точку η вдоль траекторий системы (7).

В дальнейшем всюду будем предполагать, что правая часть системы (6) непрерывно зависит от α.

В [11] рассмотрен вопрос о том, что если система (7) N-локально управляема вблизи точки η, то при каких условиях система (6) будет N-локально управляемой вблизи точки η для α, достаточно близких к α_0.

Из результатов работ [10, 11] вытекает следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть система* (7) *N-локально управляема вблизи точки η_0. Тогда если множество $D^0(\eta_0) = \{f(\eta_0, u, \alpha_0) : u \in U\}$ содержит положительный базис касательного пространства $T_{\eta_0}M$ многообразия M в точке η_0, то существует окрестность V точки α_0 такая, что система* (6) *N-локально управляема вблизи точки η_0 при каждом $\alpha \in V$.*

Напомним, что семейство векторов $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ называется положительным базисом в $\mathbb{R}^n$, если для каждого $a \in \mathbb{R}^n$ существуют неотрицательные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ такие, что $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m$ (см. [10]).

Известно, что для того чтобы векторы $a_1, a_2, \dots, a_m$ составляли положительный базис в $\mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого единичного вектора a нашелся такой a_i, что $(a, a_i) < 0$, где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение (см. [10]).

Используя этот критерий положительного базиса и непрерывность отображения $f(x, u, \alpha)$, нетрудно показать, что в условиях теоремы 9 существует такое $\delta > 0$, что при $\rho(\eta, \eta_0) < \delta$ и $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ множество $D(\eta) = \{f(\eta, u, \alpha) : u \in U\}$ содержит положительный базис касательного пространства $T_\eta M$.

Здесь $\rho(\eta, \eta_0)$ — расстояние между точками η_0 и η, определенное римановой метрикой g на M, $|\alpha - \alpha_0|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^q$. В силу того, что множество $D(\eta)$ содержит положительный базис, система (6) N-локально управляема вблизи каждой точки множества $B(\delta) = \{\eta \in M : \rho(\eta, \eta_0) < \delta\}$ при каждом α, если $|\alpha - \alpha_0| < \delta$.

Как отмечено в [11], если множество $D(\eta)$ не содержит положительный базис, то система (6) может не быть N-локально управляемой при $\alpha \neq \alpha_0$, если даже α достаточно близко к α_0.

Теперь предположим, что система (7) вполне управляема и рассмотрим вопрос: при каких условиях система (6) будет вполне управляемой для α, достаточно близких к α_0?

В случае, когда M — компактное многообразие и f гладко зависит от α, из результатов работы [21] можно получить следующее: существует такое $\delta > 0$, что система (1) вполне управляема при каждом α из $\{\alpha \in A : |\alpha - \alpha_0| < \delta\}$.

Следующая теорема является обобщением вышеуказанного утверждения на случай, когда f непрерывно зависит от α, доказана в [8].

Теорема 10. *Пусть $K \subset M$ — компактное связное подмногообразие размерности n, и система* (7) *вполне управляема на K. Тогда существует такое $\delta > 0$, что система* (6) *вполне управляема на K при каждом α из множества $\{\beta \in A : |\beta - \alpha_0| < \delta\}$.*

Напомним, что система (6) вполне управляема на подмножестве $S \subset M$, если для каждой пары $(x, y) \in S \times S$ из точки x можно попасть в точку y вдоль траектории системы (6).

Замечание 2. Утверждение теоремы 10 неверно, если размерность K меньше n. Например, если U состоит из одной точки, мы имеем семейство векторных полей $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Предположим, что векторное поле X_{α_0} имеет замкнутую траекторию K. Ясно, что система (1) при $\alpha = \alpha_0$ вполне управляема на K. Но если $\dim M > 1$ и векторные поля X_α не касательны к K при $\alpha \neq \alpha_0$, то система не является вполне управляемой на K для $\alpha \neq \alpha_0$.

Напомним, что множество $V(M)$ гладких векторных полей класса C^∞ является алгеброй Ли относительно скобки Ли $[X, Y]$ векторных полей $X, Y \in V(M)$. Положим $D_\alpha = \{f(\cdot, u, \alpha) : u \in U\}$ и обозначим через P_α наименьшую подалгебру Ли, содержащую множество векторных полей D_α.

Теперь предположим, что при каждом α система (6) симметрична, а при каждом $u \in U$ отображение $f(\cdot, u, \cdot)\colon M \times A \to TM$ класса C^∞. Симметричность означает, что если $X \in D_\alpha$, то $-X \in D_\alpha$.

В [8] доказана следующая теорема.

Теорема 11. *Пусть $P_\alpha(x) = \{X(x) : X \in P_\alpha\}$, где $x \in M$. Предположим, что система* (7) *N-локально управляема вблизи точки η. Тогда, если $\dim P_{\alpha_0}(\eta) = n$, то существует такое число $\delta > 0$, что система* (7) *N-локально управляема вблизи точки η при каждом α из $B_\delta(\alpha_0) = \{\alpha \in A : |\alpha - \alpha_0| < \delta\}$.*

Теперь предположим, что размерность $\dim P_\alpha(x)$ не зависит от x, а зависит от α. В этом случае получен следующий результат (см. [8]).

Теорема 12. *Пусть система* (6) *вполне управляема при* $\alpha = \alpha_0$. *Тогда существует такое* $\delta > 0$, *что система* (6) *вполне управляема при каждом* α *из* $B_\delta(\alpha_0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азамов А. А., Нарманов А. Я.* О предельных множествах орбит систем векторных полей// Диффер. уравн. — 2004. — *40*, № 2. — С. 257–260.
2. *Нарманов А. Я.* О множествах управляемости систем управления, являющихся слоями слоения коразмерности один// Диффер. уравн. — 1983. — *19*, № 9. — С. 1627–1630.
3. *Нарманов А. Я.* Теорема стабильности для некомпактных слоев слоения коразмерности один// Вестн. ЛГУ. — 1983. — № 9. — С. 100–102.
4. *Нарманов А. Я.* О зависимости множества управляемости от целевой точки// Диффер. уравн. — 1985. — *21*, № 9. — С. 1504–1508.
5. *Нарманов А. Я.* О зависимости множества управляемости от целевой точки// Диффер. уравн. — 1995. — *31*, № 4. — С. 597–600.
6. *Нарманов А. Я.* О трансверсальной структуре множества управляемости симметричных систем управления// Диффер. уравн. — 1996. — *32*, № 6. — С. 780–783.
7. *Нарманов А. Я.* О зависимости множества управляемости от целевой точки// Диффер. уравн. — 1997. — *33*, № 10. — С. 1334–1338.
8. *Нарманов А. Я.* О стабильности вполне управляемых систем// Диффер. уравн. — 2000. — *36*, № 10. — С. 1336–1344.
9. *Нарманов А. Я., Саитова С. С.* О геометрии орбит векторных полей Киллинга// Диффер. уравн. — 2014. — *50*, № 12. — С. 1582–1589.
10. *Петров Н. Н.* Об управляемости автономных систем// Диффер. уравн. — 1968. — *4*, № 4. — С. 606–617.
11. *Петров Н. Н.* Управляемые системы, подобные системам с выпуклой вектограммой// Вестн. ЛГУ. — 1974. — № 1. — С. 63–69.
12. *Тамура И.* Топология слоений. — М.: Мир, 1979.
13. *Gauthier J. P., Bornard G.* An openness condition for the controllability of nonlinear systems// J. Control Optim. — 1982. — *20*, № 6. — P. 708–714.
14. *Hermann R.* On the differential geometry of foliations// Ann. Math. — 1960. — *72*, № 3. — P. 445–457.
15. *Inaba T.* On the stability of proper leaves of codimension one foliations// J. Math. Soc. Jpn. — 1977. — *29*, № 4. — P. 771–778.
16. *Molino P.* Riemaninan Foliations. — Boston–Basel: Birkhäuser, 1988.
17. *Reinhart B.* Foliated manifolds with bundle-like metrics// Ann. Math. — 1959. — *69*, № 1. — P. 119–132.
18. *Schweitzer P. A.* Some problems in foliation theory and related areas// Lect. Notes Math. — 1978. — *652*. — P. 240–252.
19. *Stefan P.* Accessibility and foliations with singularities// Bull. Am. Math. Soc. — 1974. — *80*, № 6. — P. 1142–1145.
20. *Sussmann H.* Orbits of family of vector fields and integrability of systems with singularities// Bull. Am. Math. Soc. — 1973. — *79*. — P. 197–199.
21. *Sussmann H.* Some properties of vector field systems that are not altered by small perturbations// J. Differ. Equations. — 1976. — *20*. — P. 292–315.
22. *Tondeur Ph.* Foliations on Riemannian Manifolds. — New York: Springer-Verlag, 1988.

Нарманов Абдигаппар Якубович
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Ташкент, Узбекистан
E-mail: narmanov@yandex.ru