ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 216 (2022). С. 97–105
DOI: 10.36535/0233-6723-2022-216-97-105

УДК 514.763.23

О ГЕОМЕТРИИ КОНФОРМНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

© 2022 г. А. Я. НАРМАНОВ, О. Ю. КАСЫМОВ, Э. О. РАЖАБОВ

Аннотация. Статья представляет собой обзор некоторых работ по геометрии конформных векторных полей.

Ключевые слова: многообразие, векторное поле Киллинга, конформное векторное поле, орбита, слоение, распределение.

ON GEOMETRY OF CONFORMAL VECTOR FIELDS

© 2022 A. Ya. NARMANOV, O. Yu. QASIMOV, E. O. RAJABOV

Abstract. This paper is a review of some works on the geometry of conformal vector fields.

Keywords and phrases: manifold, Killing vector field, conformal vector field, orbit, foliation, distribution.

AMS Subject Classification: 22A05, 54H15, 57R50, 53C12

1. Введение. Пусть M — гладкое многообразие размерности n, множество $V(M)$ всех гладких векторных полей на многообразии M является линейным пространством над полем действительных чисел и является алгеброй Ли относительно скобки Ли.

Рассмотрим некоторое семейство $D \subset V(M)$ гладких векторных полей. Семейство D может содержать конечное и бесконечное число гладких векторных полей. Для векторного поля $X \in D$ через $X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку $x \in M$ при $t = 0$. Отображение $t \to X^t(x)$ определено в некоторой области $I(x)$, которая в общем случае зависит не только от поля X, но и от начальной точки x.

В дальнейшем всюду в формулах вида $X^t(x)$ будем считать, что $t \in I(x)$. Если для всех точек $x \in M$ область определения $I(x)$ кривой $t \to X^t(x)$ совпадает с числовой осью, то векторное поле X называется полным векторным полем.

В статье всюду под гладкостью понимается гладкость класса C^∞.

Определение 1 (см. [1, 19]). Орбита $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку x, определяется как множество таких точек y из M, для которых существуют действительные числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и векторные поля

$$X_1, X_2, \ldots, X_k$$

из D (где k произвольное натуральное число) такие, что

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\ldots(X_1^{t_1})\ldots)). \tag{1}$$

Работа выполнена при поддержке Министерства инновационного развития Республики Узбекистан (проект фундаментальных исследований Ф3-2020092531.

Определение 2. Точка $y \in L(x)$ называется T-достижимой из точки $x \in M$, если существует такое представление (1), для которого
$$\sum_{i=1}^{k} t_i = T.$$

Ясно, что если D состоит из одного векторного поля, орбита является гладкой кривой (одномерным многообразием).

Фундаментальным результатом в изучении геометрии и топологии орбит стала теорема Сусманна (см. [19,20]), которая показывает, что существует вполне интегрируемое распределение P на M такое, что для каждой точки $x \in M$ орбита $L(x)$ совпадает с максимальным интегральным подмногообразием P, проходящим через точку x.

Топология орбиты $L(x_0)$ (топология Суссмана) вводится как сильнейшая топология, для которой все отображения вида
$$(t_1, t_2, \ldots, t_k) \longrightarrow X_1^{t_1}(X_{i_{k-1}}^{t_{k-1}} \ldots (X_{i_1}^{t_1}(x_0) \ldots))$$
являются непрерывными.

Обозначим через $A_x(T)$ множество точек, которые T-достижимы из точки x. В [13] доказана следующая теорема.

Теорема 1 (см. [13]). *Множество $A_x(T)$ для каждого $x \in M$ при любом T является погруженным подмногообразием орбиты $L(x)$ коразмерности единицы или ноль.*

Напомним, что если в определении 1 потребовать, что числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ являются неотрицательными, то мы получим определение положительной полуорбиты $L^+(x)$.

О положительной орбите Суссманном получена следующая теорема, которая доказана совместно с N. Levitt (см. [10]).

Теорема 2. *Пусть M — гладкое связное многообразие размерности n. Существует система D, состоящая из двух векторных полей такая, что $L^+(x) = M$ для каждой точки $x \in M$.*

В [13] доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть M — гладкое связное многообразие размерности $n \geqslant 2$. Существует система D, состоящая из трех векторных полей, такая, что $A_x(0) = M$ для каждой точки $x \in M$.*

Напомним, что отображение P, ставящее каждой точке $x \in M$ некоторое подпространство $P(x) \subset T_xM$ касательного пространства T_xM, называется распределением. Если $\dim P(x) = k$ для всех $x \in M$, то P называется k-мерным распределением.

Распределение P называется гладким, если для каждой точки $x \in M$ существует окрестность этой точки $U(x)$, и гладкие векторные поля $X_1, X_2, \ldots, X_m$, заданные на $U(x)$, такие, что векторы
$$X_1(y), X_2(y), \ldots, X_m(y)$$
образуют базис для подпространства $P(y)$ для каждого $y \in U(x)$.

Семейство D гладких векторных полей естественным образом порождает гладкое распределение, которое каждой точке $x \in M$ сопоставляет подпространство $P(x)$ касательного пространство T_xM , порожденное множеством векторов
$$D(x) = \{X(x) : X \in D\}.$$
Разумеется, размерности подпространств $P(x)$ может меняться от точки к точке.

Распределение P называется вполне интегрируемым, если для каждой точки $x \in M$ существуют подмногообразие N_x многообразия M такое, что $T_yN_x = P(y)$ для всех $y \in N_x$. Подмногообразие N_x называется интегральным подмногообразием распределения P. Для векторного поля X будем писать $X \in P$, если $X(x) \in P(x)$ для всех $x \in M$.

Распределение P называется инволютивным, если из $X, Y \in P$ вытекает, что $[X, Y] \in P$, где $[X, Y]$ — скобка Ли векторных полей X, Y.

Необходимое и достаточное условие вполне интегрируемости распределения постоянной размерности дано в теореме Фробениуса (см. [4, с. 20, предложение 2.1]).

Теорема 4 (Фробениус). *Для того чтобы распределение P на многообразии M было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было инволютивным.*

Теорема Фробениуса, обобщенная Херманном для распределений непостоянной размерности, дает необходимое и достаточное условие для вполне интегрируемости семейства векторных полей, состоящее из конечного числа векторных полей (см. [5]).

Теорема 5 (R. Hermann). *Пусть $D = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ — семейство векторных полей на многообразии M. Семейство D порождает вполне интегрируемое распределение тогда и только тогда, когда оно инволютивно.*

Инволютивность семейства векторных полей $D = X_1, X_2, \dots, X_k$ означает следующее: для векторных полей $X, Y \in D$ существуют гладкие функции $f^l(x)$, $x \in M$, $l = 1, \dots, k$, такие, что

$$[X, Y] = \sum_{l=1}^{k} f^l(x) X_l.$$

Заметим. что если многообразие M и векторные поля из D аналитичны, то теорема верна для произвольного числа (необязательно конечного числа) векторных полей (см. [12]).

Пусть $A(D)$ — наименьшая подалгебра Ли, содержащая множество D. Полагая $A_x(D) = \{X(x) : X \in A(D)\}$, получим инволютивное распределение $P_D\colon x \to A_x(D)$. Если размерности $\dim A_x(D)$ не зависят от x, то распределение $P_D\colon x \to A_x(D)$ вполне интегрируемо по теореме Фробениуса. В этом случае для каждой точки x множество $L(x)$ является интегральным подмногообразием P_D. Если размерности $\dim A_x(D)$ зависят от x, то как показывает примеры, распределение $P_D\colon x \to A_x(D)$ не обязано быть вполне интегрируемым.

2. Геометрия векторных полей Киллинга. Пусть (M, g) гладкое риманово многообразие размерности. Напомним, что векторное поле X на (M, g) называется полем Киллинга, если $L_X g = 0$, где $L_X g-$ производная Ли от метрики g в направлении X. В этом случае его поток состоит из изометрий риманова многообразия (M, g). Равенство $L_X g = 0$ эквивалентно следующему равенству:

$$Xg(Y, Z) = g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]),$$

где Y, Z — произвольные гладкие векторные поля, а $[X, Y]$ — скобка Ли векторные поля X, Y.

В случае, когда $M = \mathbb{R}^n$, векторное поле

$$X = \sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

является векторным полем Киллинга тогда и только тогда, когда выполняются условие

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = 0, \quad i \neq j, \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 0, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Отметим, что скобка Ли двух полей Киллинга дает опять поле Киллинга и линейная комбинация полей Киллинга над полем действительных чисел тоже является полем Киллинга. Поэтому множество всех векторных полей Киллинга на многообразии M, обозначаемое $K(M)$, образует алгебру Ли над полем действительных чисел. Кроме того, известно, что алгебра Ли $K(M)$ векторных полей Киллинга связного риманова многообразия M имеет размерность не более чем $n(n+1)/2$, где $n = \dim M$. Если $\dim K(M) = n(n+1)/2$, то M есть многообразие постоянный кривизны (см. [4, с. 282]).

Таким образом, в случае, когда семейство D состоит из векторных полей Киллинга, алгебра $K(M)$ конечномерна, и поэтому из теоремы-2 мы получим следующую теорему.

Теорема 6. *Каждая орбита семейства D векторных полей Киллинга является интегральным подмногообразием вполне интегрируемого распределения $P_D\colon x \to A_x(D)$.*

Действительно, в силу того, подалгебра $A(D)$ конечно порождена, распределение $P_D\colon x \to A_x(D)$ порождено конечным числом инволютивных векторных полей $X_1, X_2, \ldots, X_m$ и поэтому по теореме R. Hermann оно вполне интегрируемо.

Известно, что разбиение многообразия M на орбиты семейства является сингулярным слоением (см. [19]). Обозначим это слоение F, а множество орбит (множество слоев) обозначим через M/F. Если размерности всех орбит одинаковы, то слоение F является регулярным слоением.

Напомним некоторые понятия из теории слоений. Предположим, что $\dim A_x(D) = k$ для всех $x \in M$, где $0 < k < n$. Тогда разбиение F многообразия на орбиты является k-мерным слоением (см. [1, 19]). Известно, что если векторные поля из семейства D являются векторными полями Киллинга, то слоение F является римановым (см. [8]).

Напомним, что слоение F на римановом многообразии M называется римановым, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой своей точке к слою слоения F, остается ортогональной во всех своих точках к слоям F (см. [8, 19]).

Пусть L — слой слоения F (орбита семейства D), $x \in L$, T_xL — касательное пространство L в точке x, $H(x)$ — ортогональное дополнение T_xL. Возникают два подрасслоения $TF\colon x \longrightarrow T_xL$, $H\colon x \longrightarrow H(x)$ касательного расслоения TM многообразия M. В этом случае каждое векторное поле $X \in V(M)$ можно представить в виде $X = X_F + X_H$, где X_F, X_H — ортогональные проекции X на TF, H соответственно. Если $X_H = 0$, то оно называется вертикальным полем (касательным к F), а если $X_F = 0$, то X называется горизонтальным полем.

Пусть $f\colon M \longrightarrow N$ — дифференцируемое отображение максимального ранга, где M — гладкое риманово многообразие размерности n, N — гладкое риманово многообразие размерности m, где $n > m$. Тогда для каждой точки $q \in N$ множество $L_q = \{p \in M : f(p) = q\}$ является многообразием размерности $n - m$ и разбиение M на многообразия L_q является $k = n - m$-мерным слоением. Отображение $f\colon M \longrightarrow N$ называется римановой субмерсией, если дифференциал df отображения f сохраняет длину горизонтальных векторов (см. [8]).

В случае, когда слоение F является регулярным слоением, в [8] показано, что множество M/F имеет структуру гладкого многообразия. А именно, доказана следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть (M, g) — полное риманово многообразие, и слоение F риманово. Тогда, если все слои являются замкнутыми подмножествами и группы голономии всех слоев тривиальны, то множество M/F, наделенное фактортопологией, обладает такой дифференциальной структурой гладкого многообразия, что отображение $x \to L(x)$ является дифференцируемым отображением максимального ранга, т.е. является субмерсией.*

В общем случае множество M/F не обязательно должно быть гладким многообразием. В данной работе изучается геометрия множества M/F в случае, когда множество D состоит из векторных полей Киллинга.

Рассмотрим отображение $\pi\colon M \to M/F$, при котором $\pi(x) = L(x)$, где $L(x)$ — слой, содержащий точку x. Следующая теорема, доказанная в [11], показывает, что орбиты являются слоями римановой субмерсии.

Теорема 8. *Пусть $M = \mathbb{R}^n$, множество D состоит из векторных полей Киллинга и $\dim A_x(D) = k$ для всех $x \in M$, где $0 < k < n$. Тогда множество слоев $B = M/F$, наделенное фактортопологией, обладает такой дифференциальной структурой гладкого $n - k$-мерного многообразия неотрицательной кривизны, что отображение $\pi\colon M \to B$ является гладкой римановой субмерсией.*

В общем случае множество слоев слоения не является многообразием. Как показывают существующие результаты, чаще всего орбифолды возникают в теории слоений как пространство слоев. Как показано в [3], если трансверсально полное риманово слоение имеет собственный слой с конечной группой голономии, то пространство слоев является орбифолдом. Из [17] известно, что это также верно, если все слои F замкнуты. Также известно, что пространство слоев компактного слоения является орбифолдом тогда и только тогда, когда слоение локально устойчиво (см. [21]).

Теперь мы дадим понятие орбифолда, которое является обобщением понятия многообразия. Пусть X — связное хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой.

Определение 3. Карта орбифолда в топологическом пространстве X это набор из четырех элементов $(\widetilde{U}, G, U, \varphi)$, где U открытое подмножество X, $\widetilde{U}$ открыто в $\mathbb{R}^n$, а G конечная группа гомеоморфизмов множества $\widetilde{U}$, $\varphi\colon \widetilde{U} \to U$ — карта, которую можно разложить на множители как $\varphi = \widetilde{\pi}\cdot\pi$, где $\pi\colon \widetilde{U} \to \widetilde{U}/G$ — фактороотображение на множество орбит и $\widetilde{\pi}\colon \widetilde{U}/G \to U$– некоторый гомеоморфизм.

Карта линейна, если G-действие на $\mathbb{R}^n$ линейно.

Для $i = 1; 2$ предположим, что $(\widetilde{U}_i, G_i, U_i, \varphi_i)$ являются картами орбифолда на X. Эти карты совместимы, если для точек $\widetilde{u}_i \in \widetilde{U}_i$ с $\varphi_1(\widetilde{u}_1) = \varphi_2(\widetilde{u}_2)$ существует гомеоморфизм h из окрестности $\widetilde{u}_1$ в $\widetilde{U}_1$ в окрестность $\widetilde{u}_2$ в $\widetilde{U}_2$, такой, что $\varphi_1 = \varphi_2 \cdot h$ в этой окрестности.

Определение 4. Орбифолдный атлас на X — это совокупность совместимых орбифолд-карт $\{(\widetilde{U}_i, G_i, U_i, \varphi_i)\}$, покрывающих X.

Максимальный атлас A класса C^r называется C^r-дифференциальной структурой орбифолда на X, и пара (X, A) дифференцируемым C^r-орбифолдом. Любой атлас класса C^r однозначно определяет максимальный атлас того же класса. Число n называется размерностью орбифолда (X, A).

Пример 1. Единственная конечная группа, которая действует линейно (и эффективно) на $\mathbb{R}^1$- циклическая группа G_2 порядка 2. Она действует через отображение $x \to -x$. Пространство орбит $\mathbb{R}^1/G_2$ есть $[0; \infty)$. Отсюда следует, что всякий одномерный орбифолд X является либо одномерным многообразием, либо одномерным многообразием с краем. Если X компактно и связно, то это либо окружность или сегмент вида $[0; 1]$.

Пусть F — сингулярное слоение на римановом многообразии. Слой L слоения F называется регулярным, если размерность слоя L_p максимален. Слой L слоения F называется сингулярным, если он не является регулярным. Точка регулярного слоя L называется регулярной точкой слоения F. Точка слоения F называется сингулярной, если она не является регулярной.

В [11] введено понятие сингулярного риманова слоения с сечением, которое понадобится для изложения некоторых теорем.

Определение 5. Пусть F — сингулярное риманово слоение на полном римановом многообразии. Слоение F называется сингулярным римановым слоением с сечением, если для каждой регулярной точки $p \in L$ множество $\sigma := \exp_p(H_pL)$ является полным погруженным подмногообразием, которое пересекает каждый слой ортогонально и в нем множество регулярных точек всюду плотно. Множество σ называется сечением (см. [11]).

Типичными примерами сингулярных римановых слоений с сечениями являются орбиты полярного действия, параллельные подмногообразия изопараметрического многообразия в пространственной форме.

Изометрическое действие компактной группы Ли G на римановом многообразии M называется полярным, если существует полное погруженное подмногообразие σ в M, которое ортогонально пересекает каждую G-орбиту. Такое подмногообразие σ называется сечением. Типичным примером полярного действия является компактная группа Ли с биинвариантной метрикой, которая действует на себя сопряжением. Например, действие группы ортогональных вращений на евклидовой плоскости является полярным. В этом случае орбитами являются концентрические окружности, сечением является любая прямая, проходящая через центр окружностей.

Следующая теорема показывает, что сингулярное риманово слоение малой коразмерности евклидовой плоскости и трехмерного евклидова пространства является слоением с сечением.

Теорема 9. *Пусть F сингулярное слоение на $\mathbb{R}^n$, порожденное орбитами семейства D векторных полей Киллинга, где $n = 2, 3$. Если размерность регулярных слоев равна $n-1$, то слоение F является сингулярным римановым слоением с сечением.*

Следующая теорема показывает, что в общем случае сингулярное риманово слоение малой коразмерности евклидова пространства является слоением с сечением, если сингулярные слои изолированы (см. [13]).

Теорема 10. *Пусть F сингулярное слоение на $\mathbb{R}^n$, порожденное орбитами семейства D векторных полей Киллинга. Предположим, что все сингулярное слои изолированы, а размерность регулярных слоев равна $n-1$. Тогда слоение F является римановым слоением с сечением.*

Как показывает следующий пример, сингулярные слои сингулярного риманова слоения на $\mathbb{R}^n$ не обязательно изолированы.

Пример 2. Рассмотрим векторные поля в $\mathbb{R}^4$, которые имеют следующий вид в декартовых координатах (x_1, x_2, x_3, x_4):

$$X = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_4\frac{\partial}{\partial x_3} + x_3\frac{\partial}{\partial x_4}, \quad Y = x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + x_4\frac{\partial}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_2\frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Нетрудно показать, что $[X, Y] = 0$. Отсюда следует, что семейство $D = \{X, Y\}$ инволютивно, соответственно по теореме Фробениуса—Хермана семейство векторных полей $D = \{X, Y\}$ вполне интегрируемо.

Теперь покажем, что каждая регулярная орбита семейства векторных полей $D = \{X, Y\}$ является двумерным тором.

Рассмотрим отображение $(t, s) \to X^t(Y^s(p))$ для всех $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ в каждой точке p. Если в точке p векторные поля X, Y линейно независимы, ранг этой карты в точке p равен двум. Следовательно, орбита, проходящая через точки p, является двумерным многообразием. Равенство $[X, Y] = 0$ означает, что $X^t(Y^s(p)) = Y^s(X^t(p))$ для всех $(t, s)\, in\mathbb{R}^2$. Это означает, что поток векторного поля X переводит интегральные кривые векторного поля Y в интегральные кривые векторного поля Y (соответственно поток векторного поля Y переводит интегральные кривые векторного поля X в интегральные кривые векторного поля X). Поскольку любая интегральная кривая векторного поля Y и X является окружностью, мы получаем, что регулярные орбиты — это двумерные торы.

Векторные поля X, Y коллинеарны только на двух двумерных плоскостях, которые задаются уравнениями $x_1 = x_4$, $x_2 = -x_3$ и $x_1 = -x_4$, $x_2 = x_3$ соответственно.

На этой плоскости все орбиты представляют собой концентрические окружности с центром в начале координат. Таким образом, сингулярные слои этого сингулярного риманова слоения не изолированы.

В [14] доказана следующая теорема, которая показывает, что если сингулярное риманово слоения является слоением с сечением, то множество слоев является орбиобразием.

Теорема 11. *Пусть F — сингулярное слоение на $\mathbb{R}^n$, порожденное орбитами семейства D векторных полей Киллинга. Если слоение F является сингулярным римановым слоением с сечением, то множество слоев является гладким орбифолдом.*

3. Геометрия конформных векторных полей. В этом разделе мы изучаем геометрию орбит конформных векторных полей и, в частности, показываем, что если множество D состоит из конформных векторных полей, то распределение $P_D\colon x \to A_x(D)$ полностью интегрируем.

Определение 6. Векторное поле X конформно, если $L_X g = \sigma g$, где σ — функция на (M, g), $L_X g$ обозначает производную Ли от метрики g относительно X.

Известно, что векторное поле X на (M, g) конформно тогда и только тогда, когда локальная однопараметрическая группа локальных преобразований, порожденная векторным полем X, состоит из конформных преобразований. Локальная однопараметрическая группа локальных преобразований, порожденная конформным векторным полем, состоит из гомотетий, если σ является константой, и состоит из изометрий, если $\sigma = 0$.

Напомним, что диффеоморфизм $\phi\colon M \to M$ называется конформным преобразованием, если $|d|\phi(g) = \lambda g$, где $|d|\phi(g)(u, v) = g(|d|\varphi(u), |d|\varphi(v))$, λ — положительная функция на (M, g), u, v — касательные векторы. Если постоянная λ, то ϕ является преобразованием гомотетии. Если

λ тождественно равен 1, то ϕ является изометрией. Примерами конформных векторных полей являются векторные поля Киллинга.

Многочисленные исследования посвящены изучение геометрии конформных векторных полей (см. [2, 6, 7, 15–17]): в частности, в [6] доказано, что если многообразие компактно, то множество неподвижных точек конформного векторного поля является подмногообразием четной коразмерности. В [17] было показано, что если риманово многообразие (M, g) отличается от евклидова пространства или сферы, то на многообразии (M, g) существует риманова метрика $\tilde{g}$, конформно эквивалентная римановой метрике g такой, что группа конформных преобразований многообразия (M, g) является группой изометрий в $(M, \tilde{g})$ (см. также [2]). Этот факт показывает, что все конформные векторные поля на многообразиях являются векторными полями Киллинга относительно римановой метрики $\tilde{g}$. Из этого следует, что на многообразиях, отличных от евклидова пространства и от сферы, изучение геометрии конформных векторных полей сводится к изучению векторных полей Киллинга (см. [5]).

Отметим, что скобка Ли двух конформных полей и линейная комбинация конформных полей над поля действительных чисел также являются конформными полями. Следовательно, множество $\mathrm{Conf}(M)$ всех конформных векторных полей на многообразии M является алгеброй Ли над полем действительных чисел. Кроме того, хорошо известно, что размерность алгебры Ли $\mathrm{Conf}(M)$ конформных векторных полей на связном римановом многообразии M не превосходит $(n+1)(n+2)/2$, где $n = \dim M$, $n \geqslant 3$ (см. [4, с. 310, теорема 1]).

Теперь через $A(D)$ обозначим наименьшую подалгебру Ли в $\mathrm{Conf}(M)$, содержащую множество D. Поскольку алгебра $\mathrm{Conf}(M)$ конечномерна, отсюда следует, что существуют векторные поля конечных чисел $X_1, X_2, \ldots, X_m$ в $A(D)$ так, что векторы $X_1(x), X_2(x), \ldots, X_m(x)$ образуют базис подпространства $A_x(D)$ для каждого $x \in M$. Поэтому из теоремы 2 вытекает следующее утверждение для случая, в котором состоит семейство D конформных векторных полей.

Теорема 12. *Пусть $n \geqslant 3$, D — семейство конформных векторных полей. Тогда каждая орбита D является интегральным многообразием вполне интегрируемого распределения*

$$P_D \colon x \to A_x(D).$$

Следующая теорема показывает, что при $n \geqslant 3$ каждая точка из орбиты $L(x_0)$ достижима из x_0 с помощью конечного числа «переключений» с использованием векторных полей $X_1, X_2, \ldots, X_m$ в определенном порядке (см. [15]).

Теорема 13. *Множество точек вида*

$$y = X_m^{t_m}(X_{m-1}^{t_{m-1}}(\ldots(X_1^{t_1}(x_0)\ldots)))$$

где $(t_1, t_2, \ldots, t_m) \in U$ совпадает с орбитой $L(x_0)$.

Заметим, что это теорема для векторных полей Киллинга верна для любых n (см. [5]).

В [5] доказана следующая теорема, которая показывает, что орбиты векторных полей Киллинга в евклидовом пространстве являются замкнутыми подмножествами.

Теорема 14. *Пусть $M = \mathbb{R}^n$ и множество D состоит из векторных полей Киллинга. Тогда каждая орбита семейства D является замкнутым подмножеством.*

Эта теорема не верна для конформных векторных полей, не являющихся полями Киллинга. Для конформных векторных полей теорема 13 позволяет доказать следующую теорему при $n \geqslant 3$ (см. [14]); при $n = 2$ теорема доказывается с использованием результатов работы [9].

Теорема 15. *Пусть $M = \mathbb{R}^n$, множество D состоит из конформных векторных полей и $\dim A_x(D) = k$ для любого $x \in M$, где $0 < k \leqslant n$. Тогда каждая орбита семейства D является замкнутым подмножеством.*

Пример 3. Рассмотрим множество полей D, содержащих следующие векторные поля:

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad Y = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$$

на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами x_1, x_2. Эти векторные поля порождают гладкое распределение: $(x_1, x_2) \to P(x_1, x_2)$, где подпространство $P(x_1, x_2)$ является линейной оболочкой векторов $\{X(x_1, x_2) : X \in D\}$. Мы имеем $\dim P(x_1, x_2) = 2$ для каждой точки (x_1, x_2), отличной от точек $(0, x_2)$, где $\dim P(x_1, x_2) = 1$. Это семейство векторных полей конечно порождено, но не находится в инволюции. В этом случае наименьшая подалгебра Ли $A(D)$ алгебры Ли $\mathrm{Conf}(M)$, содержащая множество D, является трехмерной. Векторные поля X, Y и $Z = \partial/\partial x_2$ являются базисными полями алгебры $A(D)$.

Можно проверить, что $\dim A_x(D) = 2$ для каждой точки $x \in \mathbb{R}^2$. Распределение $x \to A_x(D)$ вполне интегрируемо по теореме Херманна, каждая орбита семейства D совпадает со всей плоскостью $\mathbb{R}^2$.

Пример 4. Рассмотрим множество D, содержащее векторное поле
$$X = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}.$$
Алгебра $A(D)$ одномерна, но размерность $\dim A_x(D)$ не является постоянной величиной. Имеем $\dim A_{(x,y)}(D) = 1$ для каждого (x, y), отличного от $(0, 0)$, где $\dim A_{(x,y)}(D) = 0$.

Пример 5. Рассмотрим множество D, содержащее только одно конформное векторное поле
$$X = -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}$$
на $M = \mathbb{R}^3$. В этом случае поток X имеет вид $X^t(x) = A(t)x + bt$ для каждого $t \in \mathbb{R}$, где $b = \{0, 0, 1\}^T$,
$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
В этом примере $\dim A_x(D) = 1$ для каждой точки $x \in M$. Орбита L_0, проходящая через начало координат O системы координат, является осью OZ. Другие орбиты — это спирали.

Замечание 1. Как показывают простые примеры, теорема 12 неверна без предположения $\dim A_x(D) = k$ для каждой точки $x \in M$. Действительно, пусть $M = \mathbb{R}^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и множество D содержит только конформное векторное поле
$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$
В этом случае для любой точки $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$$
орбита $L(p)$ не является замкнутым подмножеством.

Замечание 2. Иррациональная обмотка двумерного тора показывает, что в общем случае для римановых многообразий, отличных от евклидовых пространств, теорема 12 неверна при выполнении условия $\dim A_x(D) = k$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азамов А., Нарманов А. Я.* О предельных множествах орбит систем векторных полей// Диффер. уравн. — 2004. — *40*, № 2. — С. 257–260.
2. *Алексеевский Д. В.* Группы конформных преобразований римановых пространств// Мат. сб. — 1972. — *89 (131)*, № 2 (10). — С. 280–296.
3. *Жукова Н. И.* Слоения с локально стабильными слоями// Изв. вузов. Мат. — 1996. — № 7. — С. 21–31.
4. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981.
5. *Нарманов А. Я., Саитова С. С.* О геометрии орбит векторных полей Киллинга// Диффер. уравн. — 2014. — *50*, № 12. — С. 1582–1589.

6. *Blair D.* On the zeros of a conformal vector field// Nagoya Math. J. — 1974. — *55.* — P. 1–3.
7. *Ferrand J.* The action of conformal transformations on a Riemannian manifold// Math. Ann. — 1996. — *304.* — P. 277–291.
8. *Hermann R.* On the differential geometry of foliations// Ann. Math. Second Ser. — 1960. — *72.* — P. 445–457.
9. *Kaplan W.* Regular curve families filling the plane, I// Duke Math. J. — 1940. — № 7. — P. 154–185.
10. *Levitt N., Sussmann H.* On controllability by means of two vector fields// SIAM J. Control. — 1975. — № 6. — P. 1271–1281.
11. *Marcos M.* Singular Riemannian foliations with sections// Ill. J. Math. — 2004. — *48*, № 4. — P. 1163–1182.
12. *Nagano T.* Linear differential systems with singularities and an application to transitive Lie algebras// J. Math. Soc. Jpn. — 1966. — *18.* — P. 398–404.
13. *Narmanov A., Saitova S.* On the geometry of the reachability set of vector fields// Differ. Equations. — 2017. — *53.* — P. 311–316.
14. *Narmanov A. Ya., Qosimov O. Y.* On the geometry of the set of orbits of Killing vector fields on Euclidean space// J. Geom. Symm. Phys. — 2020. — *55.* — P. 39–49.
15. *Narmanov A., Rajabov E.* On the geometry of orbits of conformal vector fields// J. Geom. Symm. Phys. — 2019. — *51.* — P. 29–39.
16. *Sharief D.* Geometry of conformal vector fields// Arab. J. Math. Sci. — 2017. — *23.* — P. 44–73.
17. *Obata M.* The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds// Bull. Am. Math. Soc. — 1971. — *77.* — P. 265–270.
18. *Reinhart B.* Closed metric foliations// Michigan Math. J. — 1961. — *8.* — P. 7–9.
19. *Sussman H.* Orbits of families of vector fields and integrability of distributions// Trans. Am. Math. Soc. — 1973. — *180.* — P. 171–188.
20. *Sussmann H.* Some properties of vector field systems that are not altered by small perturbations// J. Differ. Equations. — 1976. — *20.* — P. 292–315.
21. *Zhukova N. I.* On the stability of leaves of Riemannian roliation// Ann. Global Anal. Geom. — 1987. — *7.* — P. 261–271.

Нарманов Абдигаппар Якубович
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `narmanov@yandex.ru`

Касымов Одилбек Юнусович
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `okasimov84@inbox.ru`

Ражабов Элдор Одилбекович
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: `rajabov2019@bk.ru`