ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 181 (2020). С. 74–83
DOI: 10.36535/0233-6723-2020-181-74-83

УДК 514.763.23

О ГРУППЕ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ СЛОЕНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2020 г. **А. Я. НАРМАНОВ, А. С. ШАРИПОВ**

Аннотация. Целью статьи является введение некоторой топологии на группе $\mathrm{Diff}_F(M)$ всех C^r-диффеоморфизмов слоеного многообразия $(M;F)$, где $r \geqslant 0$. Эта топология зависит от слоения и называется F-компактно-открытой топологией. Она совпадает с компактно-открытой топологией, когда F является n-мерным слоением. Если коразмерность слоения равна n, то сходимость в этой топологии совпадает с поточечной сходимостью, где $n = \dim M$. Доказано, что некоторые подгруппы группы $\mathrm{Diff}_F(M)$ являются топологическими группами с F-компактно-открытой топологией. Гладкость всюду в работе означает гладкость класса C^∞.

***Ключевые слова*:** многообразие, слоение, топологическая группа, компактно-открытая топология.

ON THE DIFFEOMORPHISM GROUPS OF FOLIATED MANIFOLDS

© 2020 **A. YA. NARMANOV, A. S. SHARIPOV**

Abstract. In this paper, we introduce a certain topology on the group $\mathrm{Diff}_F(M)$ of all C^r-diffeomorphisms of the foliated manifold $(M;F)$, where $r \geqslant 0$. This topology depends on the foliation and is called the F-compact-open topology. It coincides with the compact-open topology when F is an n-dimensional foliation. If the codimension of the foliation is n, then the convergence in this topology coincides with the pointwise convergence, where $n = \dim M$. We prove that some subgroups of the group $\mathrm{Diff}_F(M)$ are topological groups with the F-compact-open topology. Throughout this paper, we use smoothness of the class C^∞.

***Keywords and phrases*:** manifold, foliation, topological group, compact-open topology.

***AMS Subject Classification*:** 22A05, 54H15, 57R50, 53C12

1. Введение. Множество $\mathrm{Diff}(M)$ всех диффеоморфизмов многообразия на себя является группой относительно композиции и обратного отображения. Группа диффеоморфизмов гладких многообразий имеет важное значение в дифференциальной геометрии и в анализе. Фундаментальными работами в этой области являются исследования В. И. Арнольда, Х. Омори, А. М. Лукацкого (см. [3, 4, 10, 14, 15]).

Интенсивное развитие теории группы диффеоморфизмов началось с работы В. И. Арнольда [10], в которой доказано, что движения идеальной несжимающейся жидкости являются геодезическими на группе диффеоморфизмов, сохраняющих объем элемента.

Когда M является многообразием конечной размерности, то группа изометрий $I(M)$ риманова многообразия M является группой Ли (см. [12]).

Работа выполнена при поддержке Узбекско-Российского гранта фундаментальных исследований (проект MRU № 10-17).

Х. Омори определил дифференциальную структуру на группе диффеоморфизмов компактных многообразий, которая слабее, чем структура группы Ли в классическом смысле. Эта дифференциальная структура называется структурой ILH (inverse limit of Hilbert) групп Ли. Х. Омори доказал, что ILH-группа Ли диффеоморфизмов может действовать на компактном многообразии транзитивно и неприводимо только в следующих случаях: полная группа диффеоморфизмов, группа диффеоморфизмов, сохраняющих элемент объема, группа симплектических диффеоморфизмов, группа контактных диффеоморфизмов. Вопросы конечной порожденности группы диффеоморфизмов и свойства кривизны ILH-групп Ли диффеоморфизмов исследованы А. М. Лукацким (см. [3, 4]).

В статье рассматриваем слоеное многообразие с некоторым слоением и исследуем некоторые подгруппы группы диффеоморфизмов слоеного многообразия. Известно, что группа диффеоморфизмов является топологической группой в компактно-открытой топологии. В случае, когда многообразие компактно, этот факт доказан в [9]. Для произвольного многообразия конечной размерности этот факт доказан в [13].

2. Основные результаты. Пусть M — гладкое связное риманова многообразие размерности n, $0 < k < n$.

Определение 1. Слоением F размерности k (слоением коразмерности $n-k$) называется разбиение M на линейно связные подмножества $L_\alpha \subset M$, удовлетворяющее следующим свойствам:

(F_1) $\bigcup\limits_{\alpha\in B} L_\alpha = M$;

(F_2) если $\alpha \neq \beta$, то $L_\alpha \cap L_\beta = \varnothing$ для всех $\alpha, \beta \in B$;

(F_3) для всякой точки $p \in M$ существуют такие окрестность U и карта $(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^{n-k})$, что для каждого слоя L_α компоненты линейной связности множества $U_p \cap L_\alpha$ задаются уравнениями: $y^1 = \mathrm{const}$, …, $y^{n-k} = \mathrm{const}$.

Эта карта является отмеченной картой. Компоненты связности множеств $y^1 = \mathrm{const}$, …, $y^{n-k} = \mathrm{const}$ в отмеченных картах называются локальными слоями слоения F. При фиксированном y отображение $x \mapsto (x, y)$ является гладким вложением. Следовательно, локальные слои являются связными k-мерными подмногообразиями M, каждый слой L_α как объединение локальных слоев является k-мерным связным подмногообразием M. Заметим, что естественная топология на многообразия L_α не является топологией, индуцированной из M. Простой пример слоения задается гладкой субмерсией $f\colon M \to B$, где B является $(n-k)$-мерным многообразием. Компоненты связности полного прообраза точки $y \in B$ определяют k-мерное слоение на M (см. [15]).

Через (M, F) обозначим гладкое многообразие M размерности n, на котором задано гладкое k-мерное слоение F (где $0 < k < n$). Пусть $L(p)$-слой слоения F, проходящий через точку p, T_pF — касательное пространство слоя $L(p)$ в точке p. Имеем подрасслоение (гладкое распределение) $TF = \{T_pF \mid p \in M\}$ касательного расслоения TM многообразия M. Обозначим через $V(M)$, $V(F)$ множество гладких сечений расслоений TM, TF соответственно.

Определение 2. Если при диффеоморфизме $f\colon M \to M$ образ $f(L_\alpha)$ любого слоя L_α слоения F является слоем слоения F, то отображение $f\colon M \to M$ называется C^r-диффеоморфизмом слоеного многообразия; этот факт записывается в виде $f\colon (M, F) \to (M, F)$.

Пример 1. Пусть $M = \mathbb{R}^2(x, y)$ — евклидова плоскость с декартовыми координатами (x, y). Пусть слои L_α слоения F задаются уравнениями $x^2 - y = \alpha = \mathrm{const}$. Тогда диффеоморфизм плоскости $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, определенный формулой

$$\phi(x, y) = (x, y + \lambda f(x, y)),$$

является диффеоморфизмом слоеной плоскости $(\mathbb{R}^2, F)$, для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющего условию $\lambda \neq 1$, где $f(x, y) = x^2 - y$. Он отображает каждый слой L_α на слой $L_{(1-\lambda)\alpha}$.

Пример 2. Пусть (M, F) — слоеное многообразие, где F — гладкое слоение размерности k, где $0 < k < n$. Напомним, что векторное поле X называется слоеным полем, если для каждого векторного поля Y, касательного к слоению F, скобка Ли $[X, Y]$ также является касательным к F. Известно, что поток каждого слоеного поля состоит из диффеоморфизмов слоеного многообразия (M, F).

Для слоеной плоскости из примера 1 векторное поле $X = (x^2 - y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ является слоеным полем, и его поток состоит из диффеоморфизмов

$$\phi^t\colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to (x, x^2 - e^{-t}(x^2 - y)) \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

слоеной плоскости $(\mathbb{R}^2, F)$. Каждый диффеоморфизм (1) отображает каждый слой L_α на слой $L_{e^{-t}\alpha}$.

Следующий пример показывает, что понятие диффеоморфизм слоеного многообразия определено корректно.

Пример 3. Пусть $M = \mathbb{R}^2(x, y)$ — евклидова плоскость с декартовыми координатами (x, y). Слои L_α слоения F задаются уравнениями $y = \alpha = \mathrm{const}$. Тогда гомеоморфизм плоскости $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, определенный формулой

$$\phi(x, y) = (x + y, y^{1/3}),$$

является диффеоморфизмов на каждом слое слоения F, но не является диффеоморфизмом плоскости.

Обозначим через $\mathrm{Diff}_F(M)$ множество всех C^r-диффеоморфизмов слоеного многообразия (M, F), где $r \geqslant 0$. Множество $\mathrm{Diff}^r(M)$ является группой по отношению к суперпозиции и обратного отображения. Группа $\mathrm{Diff}_F(M)$ является подгруппой $\mathrm{Diff}(M)$; она является топологической группой в компактно-открытой топологии.

Введем некоторую топологию на группе $\mathrm{Diff}_F(M)$, которая зависит от слоения F и совпадает с компактно-открытой топологией, когда F является n-мерным слоением.

Пусть $\{K_\lambda\}$ — семейство всех компактных множеств, где каждое K_λ принадлежит какому-либо слою слоения F, и пусть $\{U_\beta\}$ — семейство всех открытых множеств на M. Рассмотрим для каждой пары $K_\lambda \subset L_\alpha$ и любого U_β совокупность всех отображений $f \in \mathrm{Diff}_F(M)$, для которых $f(K_\lambda) \subset U_\beta$. Эту совокупность отображений будем обозначать через

$$\bigl[K_\lambda, U_\beta\bigr] = \bigl\{f\colon M \to M \mid f(K_\lambda) \subset U_\beta\bigr\}.$$

Нетрудно показать, что семейство всевозможных конечных пересечений множеств вида $[K_\lambda, U_\beta]$ образует базу для некоторой топологии. Эту топологию назовем слоеной компактно-открытой топологией или коротко F-компактно-открытой топологией.

Пусть M — гладкое связное риманово многообразие конечной размерности.

Определение 3. Изометрия $\phi\colon M \to M$ называется изометрией слоеного многообразия (M, F), если она переводит слой на слой, т.е. является диффеоморфизмом слоеного многообразия (M, F).

Пример 4. Пусть $M = \mathbb{R}^2(x, y)$ — евклидова плоскость с декартовыми координатами (x, y). Пусть слоение F задается уравнением $x^2 - y = \alpha = \mathrm{const}$. Тогда изометрия плоскости $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, определенная формулой

$$\phi_\lambda(x, y) = (x, y + \lambda),$$

является изометрией слоеной плоскости $(\mathbb{R}^2, F)$ для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$. Она отображает каждый слой L_α на слой $L_\alpha - \lambda$. Семейство изометрий ϕ_λ является потоком векторного поля Киллинга $X = \partial/\partial y$. Нетрудно проверить, что диффеоморфизм слоеной плоскости из примера 1 является изометрией слоеной плоскости, но не является потоком векторного поля.

Напомним, что векторное поле X на римановом многообразии (M, g) называется векторным полем Киллинга, если поток состоит из изометрий риманова многообразия (M, g), т.е. $L_X g = 0$, где риманова метрика, а через $L_X g$ обозначена производная Ли метрики по направлению X.

Геометрия орбит семейства векторных полей Киллинга изучена в [6]. Если X является слоеным векторным полем Киллинга, то его поток состоит из изометрий слоеного многообразия (M,F).

Обозначим через $\mathrm{Iso}_F(M)$ множество всех C^r-изометрий слоеного многообразия (M,F), где $r \geqslant 0$. Имеет место $\mathrm{Iso}_F(M) = \mathrm{Diff}_F(M) \cap \mathrm{Iso}(M)$.

Теорема 1. *Пусть (M,F) — гладкое связное полное слоеное риманово многообразие конечной размерности. Тогда группа $\mathrm{Iso}_F(M)$ является топологической группой с F-компактно-открытой топологией.*

Доказательство. Сначала покажем, что отображение $(g,h) \to g \circ h$ является непрерывным для отображений $g,h \in \mathrm{Iso}_F(M)$. Пусть $g \circ h \in [K,G]$, где K — компактное подмножество некоторого слоя L слоения F, G — открытое подмножество многообразия M. Отсюда имеем $h(K) \subset g^{-1}(G)$. Так как $h(K)$ является компактным множеством, существует открытое покрытие, состоящее из конечного числа открытых подмножеств $U_1,\dots,U_m$ слоя $h(L)$ с компактным замыканием в $h(L)$, содержащихся в $g^{-1}(G)$. (Так как слой $h(L)$ локально компактен и хаусдорфов, каждая точка $h(K)$ обладает окрестностью в $h(K)$ с компактным замыканием в $h(L)$, лежащим в $g^{-1}(G)$.)

Положим $A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i$. Тогда $g \in [\bar{A},G]$, $h \in [K,A']$, где A' — такое открытое подмножество множества M, что $A \subset A' \subset g^{-1}(G)$. Отсюда следует, что $(g,h) \in [\bar{A},G] \times [K,A']$, когда $g \circ h \in [K,G]$.

Теперь обозначим через $d(x,y)$ расстояние между точками x и y, определяемое полной римановой метрикой g. Используя полноту римановой метрики на M, докажем, что отображение $\chi\colon f \to f^{-1}$ непрерывно. Для этого докажем, что прообраз $\chi^{-1}(A)$ открытого множества $A \subset \mathrm{Iso}_F(M)$ является открытым. В самом деле, достаточно доказать этот факт, когда A является элементом предбазы, т.е. A имеет вид

$$A = \Big\{ f \in \mathrm{Iso}_F(M) : f(K) \subset V \Big\}$$

где K — компакт, V — открытое множество. В этом случае прообраз множества A имеет вид

$$\chi^{-1}(A) = \Big\{ f \in \mathrm{Iso}_F(M) : f^{-1}(K) \subset V \Big\}.$$

Покажем, что $\chi^{-1}(A)$ открыто в F-компактно-открытой топологии.

Пусть $g \in \chi^{-1}(A)$, U — такая окрестность $g^{-1}(K)$ с компактным замыканием, что $\bar{U} \subset V$.

Положим

$$K_1 = g^{-1}(K), \quad U_g = \Big\{ h \in \mathrm{Iso}_F(M) :\ d(g(x),h(x)) < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall x \in K_1 \Big\},$$

где

$$\varepsilon = d(K_1, M \setminus U) = \inf \big\{ d(x,y) : x \in K_1, y \in (M \setminus U) \big\}.$$

Множество U_g является открытым множеством в F-компактно-открытой топологии в силу того, что $U_g = [K_1, V_\varepsilon]$, где $V_\varepsilon = \{x \in M : d(x,K) < \varepsilon\}$ — окрестность K, $d(x,K) = \inf\{d(x,y) : y \in K\}$ — расстояние от точки x до множества K.

Покажем, что если $h \in U_g$, то $h^{-1}(K) \subset V$, т.е. $U_g \subset \chi^{-1}(A)$. Предположим обратное. Пусть для некоторого $h \in U_g$ существует такая точка $y \in K$, что $h^{-1}(y) \in M \setminus U$, т.е. $y \in M \setminus h(U)$. Тогда в силу того, что $g^{-1}(y) \in K_1$, имеет место неравенство

$$d\big(y = g(g^{-1}(y)), h(g^{-1}(y))\big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть γ — кратчайшая (известно, что на полном римановом многообразии для каждой пары точек всегда существует кратчайшая геодезическая, которая соединяет их), идущая из точки y в точку $h(g^{-1}(y))$, а $z \in \gamma \cap \partial(h(U))$. Тогда

$$d\big(h(g^{-1}(y)), z\big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Учитывая, что h^{-1} — изометрия, имеем

$$d\big(h(g^{-1}(y)), z\big) = d\big(g^{-1}(y), h^{-1}(z)\big).$$

С другой стороны, имеем $g^{-1}(y) \in K_1$, $h^{-1}(z) \in \partial U$ и $d(g^{-1}(y), h^{-1}(z)) \geqslant \varepsilon$. Это противоречие показывает, что $h^{-1}(K) \subset U$. Следовательно, $U_g \subset \chi^{-1}(A)$. □

Пусть M — гладкое полное риманово многообразие размерности n с гладким слоением размерности k, где $0 < k < n$. Тогда каждый слой является римановым многообразием с индуцированной римановой метрикой. Следующая теорема показывает, что если M является полным римановым многообразием, то каждый слой является полным римановым многообразием с индуцированной римановой метрикой.

Теорема 2. *Пусть M — гладкое полное риманово многообразие размерности n с гладким слоением размерности k, где $0 < k < n$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Каждый слой с индуцированной римановой метрикой на нем является полным римановым многообразием.*
2. *Пусть $\gamma_m\colon \mathbb{R}^1 \to L_m$ — такая последовательность геодезических (относительно индуцированных римановых метрик) слоев L_m, что $\gamma_m(s_0) \to p$ при $m \to \infty$ для некоторого $s_0 \in \mathbb{R}^1$. Тогда существует подпоследовательность γ_{m_l} последовательности γ_m, которая поточечно сходится к некоторой геодезической $\gamma\colon \mathbb{R}^1 \to L(p)$ слоя $L(p)$, выходящей из точки p при $s = s_0$.*

Доказательство. 1. Пусть L_α — некоторый слой слоения F, $\gamma\colon (a,b) \to L_\alpha$ — геодезическая на L_α, определенной индуцированной римановой метрикой и параметризованная длиной дуги. Покажем, что если $b < \infty$ (или $a > -\infty$), то существует $\lim_{s\to b}\gamma(s)$ или $\lim_{s\to a}\gamma(s)$, принадлежащий L_α. Пусть $s_1 < s_2 < \dots < s_l < s_{l+1} < \dots$, $s_l \to b$ при $l \to \infty$, и $\varepsilon > 0$ — некоторое малое число. Тогда существует такой номер N, что

$$d\big(\gamma(s_i), \gamma(s_j)\big) \leqslant |s_i - s_j| < \varepsilon \quad x\text{для всех } i, j \geqslant N,$$

где d — расстояние на M. Следовательно, последовательность $\{\gamma(s_l)\}$ является фундаментальной. В силу того, что M полно, эта последовательность имеет предел, который мы обозначим через p. Теперь покажем, что $p \in L_\alpha$. По определению слоения, для каждой точки $p \in M$ существуют такие окрестность U точки p и локальная система координат $(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^{n-k})$ на U, что набор $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x^k}\right\}$ является базисом для гладких сечений $TF|_U$ (сужение TF на U). Такая окрестность называется расслоенной окрестностью точки p. Пусть U — расслоенная окрестность точки p с локальными координатами $(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^{n-k})$. Тогда связные компоненты пересечения $V \cap L_\beta$ для любого слоя L_β описываются уравнениями $y^1 = \mathrm{const}$, …, $y^{n-k} = \mathrm{const}$.

Если L_0 — компонента связности пересечения $V \cap L_\alpha$, содержащая точки $\gamma(s_i)$ для достаточно больших i, то ясно, что L_0 содержит точку p. Следовательно, $p \in L_\alpha$. Отсюда следует, что $\gamma(s)$ определено для всех $s \in (-\infty, +\infty)$.

2. Пусть $\pi\colon TM \to TF$ — ортогональная проекция, $V(M)$, $V(F)$, $V(H)$ — множество гладких сечений расслоений TM, TF, HF соответственно. Положим $\widetilde{\nabla}_X Y = \pi(\nabla_X Y)$ для векторных полей $X \in V(M)$, $Y \in V(F)$, где ∇ — связность Леви-Чивиты, определенная римановой метрикой g на M. Известно, что $\widetilde{\nabla}_X Y$ является связностью на TF, причем ее сужение на каждый слой L_α совпадает со связностью на L_α, определяемой индуцированной римановой метрикой на L_α из M (см. [2, 5]). Поэтому гладкая параметризованная кривая $\mu\colon (a,b) \to M$, лежащая на слое L_α слоения F, является геодезической на L_α (относительно индуцированной римановой метрики) тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{\nabla}_{\dot\mu}\dot\mu = 0. \tag{2}$$

Если μ лежит в отмеченной окрестности U, то ее уравнения имеют вид:

$$x^i = x^i(s), \quad y^\alpha = \mathrm{const}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant n-k.$$

Так как для ∇ имеет место равенство

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^l_{i,j}\frac{\partial}{\partial x^l} + \Gamma^\alpha_{i,j}\frac{\partial}{\partial y^\alpha},$$

то имеем
$$\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = \Gamma^l_{i,j}\frac{\partial}{\partial x^l},$$
где $1 \leqslant i,j,l \leqslant k$, $1 \leqslant \alpha \leqslant n-k$, $\Gamma^\beta_{i,j}$ — символы Кристоффеля. Отсюда и из свойств оператора $\widetilde{\nabla}$ вытекает, что уравнение (2) эквивалентно следующей системе дифференциальных уравнений второго порядка:
$$\frac{d^2x^i}{ds} + \Gamma^i_{l,j}\frac{dx^l}{ds}\frac{dx^j}{ds} = 0.$$
Полагая $u^i = dx^i/ds$, эту систему можно написать в виде
$$\frac{dx^i}{ds} = u^i, \quad \frac{du^i}{ds} = -\Gamma^i_{l,j}u^l u^j. \tag{3}$$
Не ограничивая общности, будем считать, что геодезические $\gamma_m\colon \mathbb{R}^1 \to L_m$ параметризованы длиной дуги и $s_0 = 0$. Покажем, что из последовательности касательных векторов $\dot\gamma_m(0)$ можно выделить сходящую подпоследовательность. Так как $|\dot\gamma_m(0)| = 1$ для всех m, имеем равенство
$$\sum_{i,j=1}^k g_{ij}(p_m)u^i_m u^j_m = 1 \tag{4}$$
для достаточно больших m, где $p_m = \gamma_m(0)$, g_{ij} — коэффициент римановой метрики g, $\{u^i_m\}$ — первые k координат вектора $\dot\gamma_m(0)$ в координатах расслоенной окрестности U точки p. Равенство (4) имеет смысл при $\gamma_m(0) \in U$. Так как $p_m \to p$ при $m \to \infty$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое m_0, для которого $|g_{ij}(p_m) - g_{ij}(p)| < \varepsilon$ при $m \geqslant m_0$. Отсюда имеем
$$\sum_{i,j=1}^k (g_{ij}(p) - \varepsilon)|u^i_m||u^j_m| \leqslant \sum_{i,j=1}^k g_{ij}(p_m)|u^i_m||u^j_m|.$$
В силу того, что матрица $\{g_{ij}(p_m)\}$ положительно определена, каждое уравнение
$$\sum_{i,j=1}^k g_{ij}(p_m)u^i u^j = 1$$
определяет эллипсоид, симметричный относительно осей координат и с центром симметрии в начале координат. Поэтому имеем
$$\sum_{i,j=1}^k g_{ij}(p_m)|u^i_m||u^j_m| = 1;$$
следовательно,
$$\sum_{i,j=1}^k (g_{ij}(p) - \varepsilon)|u^i_m||u^j_m| \leqslant 1.$$
При достаточно малом $\varepsilon > 0$, матрица $\{(g_{ij}(p) - \varepsilon)\}$ также является положительно определенной. Отсюда следует, что точки $u_m = \{u^1_m, \dots, u^k_m\}$ лежат на компактном множестве. Поэтому из последовательности u^i_m можно выделить сходящуюся подпоследовательность $u^i_{m_l}$, предел которой обозначим через u^i_0. Тогда для вектора $v = (u^1_0, \dots, u^k_0)$ имеет место соотношение
$$\sum_{i,j=1}^k g_{ij}(p)|u^i_0||u^j_0| = 1.$$

Рассмотрим геодезическую γ на слое $L(p)$, выходящую из точки p при $s = 0$ в направлении вектора v. Эта кривая удовлетворяет уравнению (3). Пусть $K_0 \subset \mathbb{R}^1$ — такой компакт, содержащий $s_0 = 0$, что $\gamma(K_0)$ лежит в U. Тогда $\gamma\colon K_0 \to L(p)$ является решением системы дифференциальных уравнений (3) с начальными условиями
$$x^i(0) = p^i, \quad u^i(0) = v^i,$$

где $i = 1, \dots, k$, $p = (p^1, \dots, p^n)$, $v = (u_0^1, \dots, u_0^n)$.

Так как $\gamma_{m_l}(0) \to p$, $\dot\gamma_{m_l}(0) \to v$ при $l \to \infty$, то по теореме о непрерывной зависимости решения дифференциальных уравнений от начальных данных последовательность γ_m сходится к γ равномерно на компакте $K_0 \subset (a, b)$. Для каждого компакта $K \subset \mathbb{R}^1$, содержащего K_0, покрывая $\gamma(K)$ расслоенными окрестностями, получим, что γ_{m_l} сходится к γ равномерно на K. $\square$

Обозначим через $\mathrm{Diff}^0_F(M)$ множество всех таких C^r-диффеоморфизмов $g \in \mathrm{Diff}_F(M)$ слоеного многообразия (M, F), что $g(L_\alpha) = L_\alpha$ для каждого слоя L_α слоения F. Поток каждого касательного векторного поля состоит из диффеоморфизмов слоеного многообразия (M, F), которые принадлежат группе $\mathrm{Diff}^0_F(M)$. Можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть (M, F) — слоеное многообразие, где M — гладкое связное многообразие конечной размерности. Тогда группа $\mathrm{Diff}^0_F(M)$ является топологической группой с F-компактно-открытой топологией.*

Доказательство. Непрерывность отображения $(g, h) \to g \circ h$ доказана в теореме 1. Обозначим через $d(x, y)$ расстояние между точками x и y, определяемое некоторой полной римановой метрикой. Известно, что гладкое многообразие M обладает полной римановой метрикой (см. [1]).

Пусть $\pi\colon TM \to TF$ — ортогональная проекция. Предположим, что $\tilde\nabla_X Y = \pi(\nabla_X Y)$ для векторных полей $X \in V(M)$, $Y \in V(F)$, где ∇ — связность Леви-Чивиты, определенная римановой метрикой g на M. Известно, что $\tilde\nabla_X Y$ является связностью на TF, причем ее сужение на каждый слой L_α совпадает со связностью на L_α, определяемой римановой метрикой на L_α из M (см. [2,3]).

Докажем, что отображение $\chi\colon f \to f^{-1}$ непрерывно. Пусть g — полная риманова метрика на M. Сужение римановой метрики g индуцирует риманову метрику на слоях. Эта индуцированная риманова метрика определяет функцию расстояния на каждом слое.

Пусть L_α — некоторый слой слоения F, d_α — расстояние на L_α, определенное индуцированной римановой метрикой g_α. По теореме 2 каждый слой L_α индуцированной римановой метрики является полным римановым многообразием.

Теперь, используя полноту римановой метрики d_α, докажем непрерывность отображения $\chi\colon f \to f^{-1}$. Для этого проверим, что полный прообраз $\chi^{-1}(A)$ открытого множества $A \subset \mathrm{Diff}^0_F(M)$ является открытым. В самом деле, достаточно показать этот факт, когда A является элементом предбазы, т.е. A имеет вид

$$A = \Big\{ f \in \mathrm{Diff}^0_F(M) : f(K) \subset V \Big\},$$

где K — компактное подмножество слоя L_α, V — открытое подмножество многообразия M. В этом случае прообраз множества A имеет вид

$$\chi^{-1}(A) = \Big\{ f \in \mathrm{Diff}^0_F(M) : f^{-1}(K) \subset V \Big\}.$$

Покажем, что $\chi^{-1}(A)$ открыто в F-компактно-открытой топологии. Пусть $g \in \chi^{-1}(A)$, U — такая окрестность $g^{-1}(K)$ в L_α, с компактным замыканием $\bar U$ в L_α, что $\bar U \subset V$. Положим

$$U(g) = \Big\{ h \in \mathrm{Diff}^0_F(M) : d_\alpha(g(x), h(x)) < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall x \in \bar U \Big\},$$

где

$$\varepsilon = d\big(K, L_\alpha \setminus g(U)\big) = \inf\big\{ d_\alpha(x, y) : x \in K,\ y \in L_\alpha \setminus g(U) \big\}.$$

Покажем, что если $h \in U(g)$, то $h^{-1}(K) \subset V$, т.е. $U(g) \subset \chi^{-1}(A)$. Предположим обратное. Пусть для некоторого $h \in U(g)$ существует такая точка $y \in K$, что $h^{-1}(y) \in L_\alpha \setminus U$, т.е. $y \in L_\alpha \setminus h(U)$. Тогда в силу того, что $g^{-1}(y) \in U$, имеет место неравенство

$$d\big(y = g(g^{-1}(y)), h(g^{-1}(y))\big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть γ — кратчайшая на L_α (так как (L_α, d_α) — многообразие полное риманово, для каждой пары точек всегда существует кратчайшая геодезическая, которая соединяет их), идущая из точки y в точку $h(g^{-1}(y))$, а $z \in \gamma \cap \partial(h(U))$. Тогда $h^{-1}(z) \in \bar U$ и, кроме того,

$$d\big(g(h^{-1}(z)), h(h^{-1}(z))\big) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, $d(y,z) < \varepsilon/2$. Следовательно,

$$d\big(y, g(h^{-1}(z))\big) \leqslant d(y,z) + d\big(z, g(h^{-1}(z))\big) < \varepsilon.$$

Но, с другой стороны, $z \notin h(U)$; кроме того, имеем

$$g(h^{-1}(z)) \in L_\alpha \setminus g(U), \quad db\big(y, g(h^{-1}(z))\big) \geqslant \varepsilon.$$

Полученное противоречие показывает, что $h^{-1}(K) \subset U$. Следовательно, $U(g) \subset \chi^{-1}(A)$. $\square$

Теперь рассмотрим еще одну подгруппу группы $\mathrm{Diff}_F(M)$. Обозначим через $G_F(M)$ множество всех $g \in \mathrm{Diff}_F(M)$, которые являются изометрией на каждом слое слоения F, т.е. для каждого слоя L_α слоения F сужение $g\colon L_\alpha \to g(L_\alpha)$ является изометрией.

Замечание 1. Если $r \geqslant 1$, то для каждого элемента $\varphi \in G_F(M)$ дифференциал $d\varphi$ сохраняет длину каждого касательного вектора $v \in T_pF$, т.е. имеет место $|d\varphi_p(v)| = |v|$ при любом p. Если же $r = 0$, то каждый элемент φ из $G_F(M)$ является гомеоморфизмом многообразия M. Риманова метрика многообразия M индуцирует на каждом слое L_α риманову метрику, которая определяет на нем расстояние. В этом случае φ является изометрией между метрическими пространствами L_α и $\varphi(L_\alpha)$. Тогда по известной теореме φ является диффеоморфизмом L_α на $\varphi(L_\alpha)$ для каждого слоя L_α (см. [11]).

Теперь докажем вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Предположим, что $\{f_m\} \in G_F(M)$ — последовательность, которая поточечно сходится на множестве $A \subset L_\alpha$, где L_α — некоторый слой слоения F. Тогда $\{f_m\}$ также поточечно сходится на $\overline{A}$ (где $\overline{A}$ — замыкание множества A в L_α).*

Доказательство. Пусть $p \in \overline{A}$, $\varepsilon > 0$. Выберем сначала такую точку $p_1 \in A$, что $d_\alpha(p,p_1) < \varepsilon/3$, и такое N, что

$$d\big(f_l(p_1), f_m(p_1)\big) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad l,m \geqslant N,$$

где $d_\alpha(p,p_1)$ — расстояние между точками p и p_1 на слое L_α. Тогда

$$d\big(f_l(p), f_m(p)\big) \leqslant d\big(f_l(p), f_l(p_1)\big) + d\big(f_l(p_1), f_m(p_1)\big) + d\big(f_m(p_1), f_m(p)\big) < \varepsilon$$

для всех $m,n \geqslant N$. Следовательно, последовательность $\{f_m(p)\}$ фундаментальна, и из полноты многообразия M получаем, что $\{f_m(p)\}$ сходится. $\square$

Лемма 2. *Пусть A — такое множество точек на слое L_α, что для каждой точки $p \in A$ существует сходящаяся подпоследовательность $f_{m_l}(p)$ последовательности $f_m(p)$. Если множество A непусто, то $A = L_\alpha$.*

Доказательство. Пусть $p \in L_\alpha$, $p^* \in A$, $r = d_\alpha(p,p^*)$, где $d_\alpha(p,p^*)$ — расстояние между точками p и p^* на L_α. Пусть подпоследовательность $\{f_{m_l}\}$ такова, что $\{f_{m_l}(p^*)\}$ сходится. Так как f_{m_l} — изометрия слоения, то расстояние $d_\alpha(p,p^*)$ между точками p и p^* на слое L_α сохраняется и

$$d_{f_l(\alpha)}\big(f_{m_l}(p), f_{m_l}(p^*)b\big) = d_\alpha(p,p^*),$$

где $d_{f_l(\alpha)}$ — расстояние на слое $f_{m_l}(L_\alpha)$. Пусть $q^* = \lim\limits_{l\to\infty}(f_{m_l}(p^*))$. Тогда

$$d\big(q^*, f_{m_l}(p)\big) \leqslant d\big(q^*, f_{m_l}(p^*)\big) + d\big(f_{m_l}(p^*), f_{m_l}(p)\big) \leqslant \varepsilon + r.$$

Следовательно, множество $\{f_{m_l}(p)\}$ имеет компактное замыкание. Отсюда следует, что $p \in A$. $\square$

Следующая теорема показывает некоторое свойство группы $G_F(M)$ с F-компактно-открытой топологией.

Теорема 4. *Пусть M — полное гладкое многообразие размерности n с гладким слоением F размерности k, $f_m \in G^r_F(M)$, $r \geqslant 0$, $m = 1,2,\dots$. Предположим, что для каждого слоя L_α существует такая точка $o_\alpha \in L_\alpha$, что последовательность $f_m(o_\alpha)$ сходится. Тогда существует подпоследовательность f_{m_l} последовательности f_m, сходящаяся в F-компактно-открытой топологии.*

Доказательство. Пусть L_α — произвольный слой. По условиям теоремы существует такая точка $o_\alpha \in L_\alpha$, что последовательность $\{f_m(o_\alpha)\}$ сходится. По лемме 2 для каждой точки $p \in L_\alpha$ последовательность $\{f_m(p)\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Отсюда следует, что последовательность $\{f_m(p)\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность для всех $p \in M$.

Риманово многообразие M является сепарабельным метрическим пространством. Поэтому оно содержит всюду плотное счетное подмножество $A = \{p_i\}$. Для каждой точки p_i существует сходящаяся подпоследовательность $\{f^i_{m_l}(p_i)\}$ последовательности $\{f_m(p_i)\}$. Используя диагональный процесс, можем найти подпоследовательность $\{f_{m_l}\}$, которая сходится во всех точках множества A. Так как для каждого слоя L_α существует точка $o_\alpha \in L_\alpha$, в которой последовательность $\{f_{m_l}\}$ сходится, то по лемме 2 она сходится во всех точках слоя L_α. Отсюда получим, что последовательность сходится поточечно в каждой точке M.

Теперь, полагая $\varphi(p) = \lim\limits_{l\to\infty} f_{m_l}$, получим отображение $\varphi\colon M \to M$. Пусть $p \in L_\alpha$ для некоторого слоя L_α, $\gamma\colon [0,l] \to L_\alpha$ — геодезическая, которая реализует расстояние $d_0 = d_\alpha(o_\alpha, p)$ на слое L_α, и параметризованная длиной дуги, $\gamma(0) = o_\alpha$, $\gamma(l) = p$. Если рассмотрим $\gamma_l = f_{m_l}(\gamma)$, то они являются геодезическими на $f_{m_l}(L_\alpha)$. По условиям теоремы $\gamma_l(0) \to p_0$ при $l \to \infty$, где p_0 — некоторая точка из M. Тогда по теореме 2 из последовательности $\{\gamma_l(s)\}$ можно выделить подпоследовательность, которая поточечно сходится к некоторой геодезической $\gamma(0)\colon \mathbb{R}^1 \to L(p_0)$ слоя $L(p_0)$, выходящей из точки p_0 при $s = 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что сама последовательность $\{\gamma_l(s)\}$ сходится к $\{\gamma_0(s)\}$ для каждого $s \in [0;l]$. Отсюда следует, что $\varphi(\gamma) = \gamma_0$, т.е. отображение φ изометрично переводит L_α на $L(p_0)$.

Теперь покажем, что f_{m_l} сходится к φ равномерно на каждом компакте, лежащем на слое слоения F. Пусть K — компактное множество на слое L и $\varepsilon > 0$. Так как K — компакт, то существует $(\varepsilon/3)$-сеть, состоящая из конечного числа точек $(p_1, \dots, p_m)$, где $p_i \in L$. Для каждой точки p_i существует такой номер N_i, что
$$d\big(f_{m_l}(p_i), \varphi(p_i)\big) < \frac{\varepsilon}{3}$$
для произвольного $m_l \geqslant N_i$. Кроме того, для каждой точки $p \in K$ существует такое p_i, что $d_L(p, p_i) < \varepsilon/3$. Отсюда следует, что
$$\begin{aligned} d\big(f_{m_l}(p), \varphi(p)\big) &\leqslant d\big(f_{m_l}(p), f_{m_l}(p_i)\big) + d\big(f_{m_l}(p_i), \varphi(p_i)\big) + d\big(\varphi(p_i), \varphi(p)\big) \leqslant \\ &\leqslant d_{m_l}\big(f_{m_l}(p), f_{m_l}(p_i)\big) + d\big(f_{m_l}(p_i), \varphi(p_i)\big) + d_l\big(\varphi(p_i), \varphi(p)\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$
для $m_l > N = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{N_i\}$, где $1 \leqslant i \leqslant m$. Следовательно, получаем, что последовательность f_{m_l} сходится к φ в F-компактно-открытой топологии. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. — М.: Мир, 1971.
2. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1981.
3. *Лукацкий А. М.* Конечнопорожденность групп диффеоморфизмов// Усп. мат. наук. — 1978. — *33*, № 1 (199). — С. 219–220.
4. *Лукацкий А. М.* Исследование геодезического потока на бесконечномерной группе Ли с использованием оператора коприсоединенного действия// Тр. Мат. ин-ти им. В. А. Стеклова РАН. — 2009. — *267*. — С. 204–213.
5. *Нарманов А. Я.* О геометрии вполне геодезических римановых слоений// Мат. тр. — 1999. — *2*, № 2. — С. 98–106.
6. *Нарманов А. Я., Саитова С.* О геометрии орбит векторных полей Киллинга// Диффер. уравн. — 2014. — *50*, № 12. — С. 1582–1589.
7. *Нарманов А. Я., Скоробогатов Д.* Изометрические отображения слоений// Докл. Акад. наук Респ. Узбекистан. — 2004. — № 4. — С. 12–16.
8. *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. — М.: Наука, 1977.
9. *Arnold V.* Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimenzion infnite et ses applications a l'hidrodynamique des uides parfaits// Ann. Inst. Fourier. — 1966. — *16*, № 1. — P. 319–361.
10. *Helgason S.* Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces. — Toronto: Academic Press, 1978.

11. *Myers S., Steenrod N.* The group of isometries of a Riemannian manifold// Ann. Math. — 1939. — *40*, № 2. — P. 400–416.
12. *Narmanov A., Sharipov A.* On the group of foliation isometries// Meth. Funct. Anal. Topol. — 2009. — *15*, № 2. — P. 195–200.
13. *Omori H.* On the group of diffeomorphisms on a compact manifold// Proc. Symp. Pure Math. — 1970. — *15*. — P. 167–183.
14. *Omori H.* Groups of diffeomorphisms and thier subgroups// Trans. Am. Math. Soc — 1973. — *179*. — P. 85–122.
15. *Tondeur P.* Foliations on Riemannian Manifolds. — New York: Springer-Verlag, 1988.

Нарманов Абдигаппар Якубович
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: narmanov@mail.ru

Шарипов Анваржон Солиевич
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: asharipov@inbox.ru