

U. Abdullaev, Yu.X. Eshqobilov, R.N.Gʻanixoʻjayev

FUNKSIONAL ANALIZ

(misol va masalalar yechish)

I qism

**“Tafakkur Boʻstoni”
Toshkent – 2015**

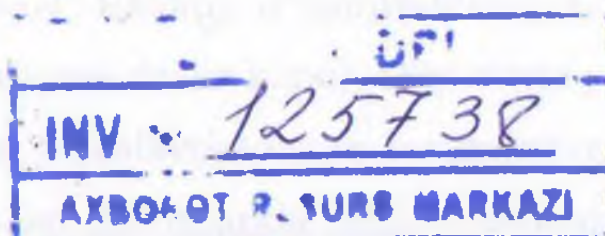
№. 104.213
F-96.

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA‘LIM VAZIRLIGI

J.I. ABDULLAYEV, Yu.X. ESHQOBILOV,
R.N. G‘ANIXO‘JAYEV

FUNKSIONAL ANALIZ
(misol va masalalar yechish)
I. QISM

*O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta‘lim vazirligi
tomonidan oliy o‘quv yurtlarining talabalari uchun o‘quv qo‘llanma
sifatida tavsiya etilgan*



"TAFAKKUR BO‘STONI"
TOSHKENT - 2015

UO'K:581(076)

KBK: 22.162ya73

F 96

J.I.Abdullayev

Funksional analiz (misol va masalalar yechish) I qism

T.: "TAFAKKUR BO'STONI" 2015.- 240 b.

Taqrizchilar:

Jalilov A.A. – Turin politexnika universiteti Toshkent filiali professori, f.m.f.d.,

Raximov A.A. – Toshkent avtomobil yo'llari instituti professori, f.m.f.d.

Mas'ul muharrir:

Ikromov I.A. – Samarqand davlat universiteti professori, f.m.f.d.

Mazkur o'quv qo'llanmada "Funksional analiz" kursining I qismini tashkil etuvchi to'plamlar Lebeg o'lchovi, o'lchovli funksiyalar, Lebeg integrali va metrik fazolar kabi mavzular bayon qilingan. Har bir mavzuga oid asosiy tushunchalar ta'rif, asosiy teoremlar va xossalari keltirilgan. Namunaviy misollar tahlil qilingan. Amaliy mashg'ulot va mavzularni mustaqil o'rganish uchun misol va masalalar berilgan.

Ushbu o'quv qo'llanma universitetlarning "Matematika", "Mexanika" va "Amaliy matematika va informatika" yo'nalishlari talabalariga mo'ljallangan bo'lib, undan boshqa yo'nalish talabalari ham foydalanishlari mumkin.

UO'K: 581(076)

KBK: 22.162ya73

F 96

© "TAFAKKUR BO'STONI", 2015 - y

© J.I. Abdullayev va boshq., 2015 - y

ISBN 978-9943-993-09-9

© "Ilm Ziya nashriyoti uyi", 2015 -y

Funksional analiz matematikaning alohida bo'limi sifatida XVIII asrning oxiri va XIX asr boshlarida shakllana boshlangan. Funksional analizga oid dastlabki ilmiy ishlar italyan matemagi Volterra, fransuz matematigi Puankare va nemis matematigi Hilbertga taalluqlidir. Metrik fazo tushunchasi fanga fransuz matematigi Freshe tomonidan XX asr boshlarida kiritilgan, normalangan fazo tushunchasi 1922 yilda polyak matematigi Banax va unga bog'liq bo'lmagan holda amerikalik matematik Viner tomonidan kiritilgan.

Ma'lumki universitetlarning "Matematika", "Mexanika" va "Amaliy matematika va informatika" yo'nalishlari uchun tuzilgan o'quv rejada "Funksional analiz" fani ko'zda tutilgan bo'lib, ushbu fan ixtisoslik fanlar ichida asosiy o'rin tutadi.

Universitetlarda "Funksional analiz" kursi asosan ikki qismdan iborat, ular shartli ravishda quyidagicha nomlanadi:

I qism. Haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi.

II qism. Operatorlar nazariyasi.

Amaldagi "Funksional analiz" kursi fan dasturida I qism "O'lchovli to'plamlar nazariyasi", "Lebeg integrali" va "Metrik fazolar" bo'limlarini o'z ichiga oladi. II qism esa, "Normalangan fazolar" va "Operatorlar nazariyasi" bo'limlarini o'z ichiga oladi. Universitetlarning matematika mutaxassisligida ta'lim oluvchi talabalar uchun "Funksional analiz" kursidan o'zbek alifbosi-da, birinchi marotaba akademik T.A. Sarimsoqov tomonidan darslik nashr etilgan (T.A. Sarimsoqov. Haqiqiy o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi; T.A. Sarimsoqov. Funksional analiz kursi). Oliy o'quv yurtlarida ta'lim shakli ikki bosqichli tizimga (bakalavriatura va magistratura) o'tishi munosabati bilan OTMlari barcha fan dasturlarida jiddiy o'zgarishlar yuzaga keldi. Bu o'zgarishlar o'z navbatida barcha yo'nalishlar uchun tegishli darslik va o'quv qo'llanmalarni ishlab chiqishni talab etmoqda. Ushbu [6, 7] o'quv qo'llanmalar, universitetlarning bakalavriatura o'quv rejasidagi "Funksional analiz" kursidan yuqoridagi ehtiyojlarni qondirish maqsadida yaratilgandir.

Mazkur o'quv qo'llanma, universitetlarning matematika yo'nalishi talabalari uchun "Funksional analiz" kursidan amaliy mashg'ulotlarni olib borishda lotin yozuviga asoslangan o'zbek alifbosida adabiyotlar tanqisligining oldini olish maqsadida yozilmoqda. Mazkur qo'llanmada "Funksional analiz" fani-ning I qismini tashkil etuvchi o'lchovli to'plamlar nazariyasi, Lebeg integrali va metrik fazolarga oid mavzular uchun tegishli ta'riflar, xossalar, teoremlar bayoni berilgan, shuningdek misol va masalalar namuna sifatida yechib ko'rsatilgan.

Birinchi bo'lim o'lchovli to'plamlar nazariyasiga bag'ishlangan bo'lib, qo'llanmada to'plamlar va ularning o'lchovlariga oid mavzular bayon qilinadi. Har bir mavzuga oid asosiy tushunchalar ta'rif, asosiy teoremlar va xossalar keltirilgan. Qo'llanma to'plamlar, akslantirishlar, to'plamlar quvvati, to'plamlar sistemasi, o'lchovli to'plamlar, o'lchovning unumiy ta'rif va o'lchovni Lebeg ma'nosida davom ettirish kabi mavzularni o'z ichiga oladi. Har bir mavzu namunaviy misollar bilan boyitilgan. Shuningdek, mavzularni o'zlashtirish va mustaqil o'rganish uchun yetarlicha misol va masalalar berilgan.

Ikkinchi bo'lim integrallar nazariyasiga bag'ishlangan. Qo'llanmada o'lchovli funksiyalar, o'lchovli funksiyalar ketma-ketliklarining yaqinlashishlari, Lebeg integrali, monoton funksiyalar, o'zgarishi chegaralangan funksiyalar, absolyut uzluksiz funksiyalar va Lebeg-Stiltes integraliga oid ma'lumotlar bayon qilinadi. Har bir mavzuga oid asosiy tushunchalar ta'rif, teoremlar va xossalar keltirilgan. Barcha mavzular bo'yicha namunaviy misollar yechimi bilan berilgan. Shuningdek, talabalar mavzularni yaxshi o'zlashtirishi va mustaqil o'rganishi uchun har xil tipdagi misol va masalalar jamlangan.

Uchinchi bo'lim metrik fazolar nazariyasiga bag'ishlangan. Qo'llanmada metrik fazolar, yaqinlashuvchi ketma-ketliklar, to'la metrik fazolar, ochiq va yopiq to'plamlar, kompakt to'plamlar, separabel metrik fazolar va qisqartirib akslantirishlarga oid mavzular bayon qilingan. Har bir mavzuga oid asosiy tushunchalar ta'rif, asosiy teoremlar va xossalar keltirilgan. Mavzularga oid namunaviy misollar yechib ko'rsatilgan. Shuningdek, mavzular bo'yicha uy

vazifalarini bajarish va mustaqil o'rganish uchun yetarlicha masalalar berilgan.

Misol va masalalar tuzishda Ayupov Sh.A., Ibragimov M.M., Kudavbergenov K.K. (Funksional analizdan misol va masalalar, Nukus, "BILIM", 2009) va Очан Ю.С. (Сборник задач по математическому анализу, Москва, Просвещение, 1981) hamda Abdullayev J.I., G'anixo'jayev R.N., Shermatov M.H. va O.I. Egamberdiyevlarning "Funksional analiz" (Toshkent-Samarqand, 2009) o'quv qo'llanmasidan keng foydalanildi. Ushbu o'quv qo'llanma O'zbekiston Milliy universiteti, Samarqand davlat universitetida *Funksional analiz* hamda *Funksional analiz va integral tenglamalar* fanlaridan ma'ruza va amaliy mashg'ulotlar olib boruvchi professor-o'qituvchilarning ko'p yillik ish tajribalari asosida yozilgan.

Mualliflar o'quv qo'llanmani yaxshilashda bergan foydali maslahatlari uchun mas'ul muharrir va taqrizchilarga, hamda matnini tahrir qilgani uchun B.E.Davranovga o'z minnatdorchiliklarini bildiradilar.

Qo'llanma birinchi marta chop qilinayotgani uchun xato va kamchiliklar bo'lishi mumkin. Xato va kamchiliklar haqidagi fikr va mulohazalaringizni jabdullaev@mail.ru elektron manziliga jo'natishlaringizni so'raymiz.

I. O'LCHOVLI TO'PLAMLAR

Ushbu bo'lim to'plamlar, akslantirishlar, to'plamlar quvvati, to'plamlar sistemasi, o'lchovli to'plamlar, o'lchovning umumiy ta'rif va o'lchovni Lebeg ma'nosida davom ettirish kabi mavzularni o'z ichiga oladi. Har bir mavzuda namunaviy misollar yechimi bilan keltirilgan. Shuningdek, amaliy mashg'ulotlar va uy vazifasi uchun yetarlicha misol va masalalar berilgan.

1-§. To'plamlar ustida amallar

Matematikada juda xilma-xil to'plamlarga duch kelamiz. Haqiqiy sonlar to'plami, tekislikdagi ko'pburchaklar to'plami, ratsional koeffitsiyentli ko'phadlar to'plami va hokazo. To'plam tushunchasi matematikada tayanch tushunchalardan bo'lib, unga ta'rif berilmaydi. *To'plam* so'zining sinonimlari sifatida *objektlar jamlanmasi* yoki *elementlar majmuasi* so'z birikmalaridan foydalaniladi. To'plamlar nazariyasi hozirgi zamon matematikasida juda muhim o'ringa ega. Biz uning ayrim xossalarini o'rganish bilan cheklanamiz.

To'plamlarni lotin alifbosining bosh harflari $A, B, \dots$ ularning elementlarini esa kichik - $a, b, \dots$ harflar bilan belgilaymiz. Biz asosan quyidagi belgilashlardan foydalanamiz. $\mathbb{N}$ - natural sonlar to'plami, $\mathbb{Z}$ - butun sonlar to'plami, $\mathbb{Q}$ - ratsional sonlar to'plami, $\mathbb{R}$ - haqiqiy sonlar to'plami, $\mathbb{C}$ - kompleks sonlar to'plami, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$ hamda $\mathbb{R}^n$ sifatida n - o'lchamli arifmetik Evklid fazo belgilanadi.

Matematik simvollarning ma'nolariga to'xtalamiz. $a \in A$ belgisi a element A to'plamga tegishli ekanligini bildiradi. Bu tasdiqning inkori $a \notin A$ shaklda yoziladi va a element A to'plamga tegishli emas deb o'qiladi. $A \subset B$ belgi A to'plamning barcha elementlari B to'plamga ham tegishli ekanligini bildiradi. Bu holda A to'plam B to'plamning qismi deyiladi. Masalan, natural sonlar to'plami haqiqiy sonlar to'plamining qismi bo'ladi. Agar A va B to'plamlar bir xil elementlardan tashkil topgan bo'lsa, u holda ular *teng to'plamlar* deyiladi va $A = B$ shaklda yoziladi. Ko'pincha, to'plamlarning tengligini isbotlashda $A \subset B$ va $B \subset A$ munosabatlarning bajarilishi

ko'rsatiladi ([1] ga qarang). Ba'zida birorta ham elementi mavjud bo'lmagan to'plamlarni qarashga to'g'ri keladi. Masalan, $2 \leq x < 2$ qo'sh tengsizlikni qanoatlantiruvchi haqiqiy sonlar to'plami yoki $|x| = -1$ tenglamaning yechimlari to'plami va hokazo. Bunday to'plamlar uchun maxsus *bo'sh to'plam* nomi berilgan va uni belgilashda $\emptyset$ simvoldan foydalaniladi. Ma'lumki, har qanday to'plam bo'sh to'plamni o'zida saqlaydi va har qanday to'plam o'zining qismi sifatida qaralishi mumkin. To'plamlarning bo'sh to'plamdan va o'zidan farqli barcha qism to'plamlari *xos qism to'plamlar* deyiladi. o'quv qo'llanmada $\wedge$ va $\vee$ belgilari mos ravishda *va* hamda *yoki* so'zlariga mos keladi.

Ixtiyoriy tabiatli A va B to'plamlar berilgan bo'lsin.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

to'plam A va B to'plamlarning *yig'indisi* yoki *birlashmasi* deyiladi.

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

to'plam A va B to'plamlarning *kesishmasi* deyiladi. Ixtiyoriy (chekli, cheksiz) sondagi A_α to'plamlarning yig'indisi va kesishmasi ham shunga o'xshash aniqlanadi:

$$\bigcup_{\alpha \in X} A_\alpha = \{x : \exists \alpha_0 \in X, x \in A_{\alpha_0}\}, \quad \bigcap_{\alpha \in X} A_\alpha = \{x : \forall \alpha \in X, x \in A_\alpha\}.$$

A va B to'plamlarning *ayirmasi* deb

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

to'plamga aytiladi. Agar $B \subset A$ bo'lsa, $A \setminus B$ to'plam B to'plamning A to'plamgacha *to'ldiruvchi to'plami* deyiladi va $C_A B := CB$ shaklda belgilanadi. Ba'zan, A va B to'plamlarning *simmetrik ayirmasi* tushunchasini kiritish maqsadga muvofiq bo'ladi. $A \setminus B$ va $B \setminus A$ to'plamlarning birlashmasidan iborat to'plamga A va B to'plamlarning *simmetrik ayirmasi* deyiladi, ya'ni

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Agar $A, B \subset G$ bo'lib, G da "+" amali aniqlangan bo'lsa, u holda

$$A + B = \{c : c = a + b, a \in A, b \in B\}$$

to'plam A va B to'plamlarning *arifmetik yig'indisi* deyiladi.

X va Y to'plamlarning *dekart ko'paytmasi* deganda

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

to'plam tushuniladi. $X \times Y$ to'plamning ixtiyoriy R qism toplami *munosabat* deyiladi. x element (x, y) juftlikning birinchi koordinatasi, y element esa uning ikkinchi *koordinatasi* deyiladi va mos ravishda $x = pr_1(x, y)$ va $y = pr_2(x, y)$ kabi belgilanadi. Xuddi shunday $X \times Y$ to'plamning ixtiyoriy R qism to'plamining birinchi va ikkinchi koordinatalarga proyeksiyalari aniqlanadi:

$$pr_1 R = \{x : x \in X, \exists y \in Y, (x, y) \in R\}.$$

$$pr_2 R = \{y : y \in Y, \exists x \in X, (x, y) \in R\}.$$

Bu to'plamlar R munosabatning mos ravishda *aniqlanish sohasi* va *qiymatlar sohasi* deyiladi. Bundan keyin biz $\mathfrak{A}(X)$ bilan X ning barcha qism to'plamlari sistemasini belgilaymiz.

Endi mavzuga oid namunaviy misollar yechib ko'rsatamiz.

1.1. To'plamlar yig'indisi va kesishmasi kommutativ. Isbotlang.

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

Isbot. Ixtiyoriy $x \in A \cup B$ elementni olamiz. Bundan

$$x \in A \vee x \in B \implies x \in B \vee x \in A \implies x \in B \cup A$$

ni olamiz. Demak, $A \cup B \subset B \cup A$ ekan. Agar $y \in B \cup A$ ixtiyoriy element bo'lsa, u holda

$$y \in B \vee y \in A \implies y \in A \vee y \in B \implies y \in A \cup B$$

bo'ladi, ya'ni $B \cup A \subset A \cup B$ ekan. Yuqorida keltirilgan munosabatlardan $A \cup B = B \cup A$ ekanligi kelib chiqadi. $\square$

1.2. Distributivlik qonunlarini isbotlang:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Isbot. $x \in (A \cup B) \cap C$ ixtiyoriy elementni bo'lsin. Ta'rifga ko'ra,

$x \in A \cup B \wedge x \in C$ bo'ladi. Bu yerdan

$$(x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C \implies x \in A \cup C \wedge x \in B \cup C \implies x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

kelib chiqadi. Demak, $(A \cup B) \cap C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ekan. Agar $y \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ixtiyoriy element bo'lsa, u holda

$$y \in A \cup C \wedge y \in B \cup C \implies (y \in A \vee y \in C) \wedge (y \in B \vee y \in C)$$

bo'ladi. Bu yerdan $y \in (A \cup B) \cap C$ ni olamiz, ya'ni $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cup B) \cap C$ ekan. Yuqorida keltirilgan munosabatlardan $(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ekanligi kelib chiqadi.

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ tenglik shunga o'xshash isbotlanadi. $\square$

To'plamlar nazariyasida muhim o'rin tutadigan va *ikkilik prinsipi* deb nomlanuvchi quyidagi munosabatni isbotlang.

1.3. Yig'indining to'ldiruvchisi to'ldiruvchilar kesishmasiga teng:

$$E \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (E \setminus A_{\alpha}), \quad A_{\alpha} \subset E. \quad (1.1)$$

Isbot. Ixtiyoriy $x \in E \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ elementni olamiz, bu yerdan $x \in E$ va $x \notin \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan ixtiyoriy α uchun x ning A_{α} to'plamga tegishli emasligiga kelamiz. Demak, x element A_{α} to'plamlarning to'ldiruvchilarida yotadi. Shunday qilib, ixtiyoriy α uchun $x \in E \setminus A_{\alpha}$ munosabat o'rinli, bundan biz $x \in \bigcap_{\alpha} (E \setminus A_{\alpha})$ ga ega bo'lamiz. Bu esa

$$E \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \subset \bigcap_{\alpha} (E \setminus A_{\alpha}) \quad (1.2)$$

munosabatni keltirib chiqaradi. Endi teskari munosabatni isbotlaymiz. Agar $x \in \bigcap_{\alpha} (E \setminus A_{\alpha})$ bo'lsa, u holda barcha α larda $x \in E \setminus A_{\alpha}$ bo'ladi va x

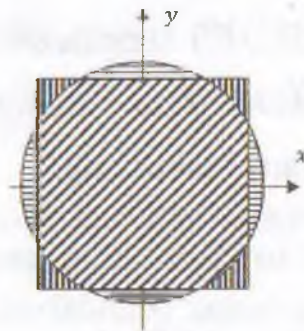
element A_α to'plamlarning birortasiga ham tegishli emas, bu esa $x \notin \bigcup_\alpha A_\alpha$ ekanligini bildiradi. Demak, $x \in E \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha$ ekan. Bundan biz

$$E \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha \supset \bigcap_\alpha (E \setminus A_\alpha) \quad (1.3)$$

ga kelamiz. (1.2) va (1.3) munosabatlar (1.1) tenglikni isbotlaydi. $\square$

1.4. $A = \{(x, y) : |x| \leq 4, |y| \leq 4\}$ va $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 25\}$ to'plamlar uchun $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$, $A \cap B$ to'plamlarni tekislikda tasvirlang.

Yechish. Tekislikda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini qaraymiz. Bu holda $A = [-4; 4] \times [-4; 4]$ kvadratdan, B esa markazi koordinatalar boshida radiusi 5 bo'lgan yopiq doiradan iborat bo'ladi (1.1-chizmaga qarang). $A \cup B$ – 1.1-chizmada shtrixlangan soha, $A \setminus B$ kvadratning uchlaridagi vertikal shtrixlangan soha, $A \Delta B$ – chizmada vertikal va gorizontaal shtrixlangan soha, $A \cap B$ – chizmada qiyalab shtrixlangan soha. $\square$



1.1-chizma

1.5. $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$ tenglikni isbotlang.

Isbot. Berilgan to'plamlarning tengligini tekshirish $A \subset B$ va $B \subset A$ munosabatlarni ko'rsatish orqali amalga oshiriladi. Endi $x \in (X \setminus Y) \setminus Z$ ixtiyoriy element bo'lsin. U holda $x \in X \setminus Y$, $x \notin Z \Rightarrow x \in X$, $x \notin Y$, $x \notin Z \Rightarrow x \in X$, $x \notin (Y \cup Z) \Rightarrow x \in X \setminus (Y \cup Z)$. Demak, $(X \setminus Y) \setminus Z \subset X \setminus (Y \cup Z)$ munosabat o'rinli. Endi teskari munosabatni ko'rsatamiz. $y \in X \setminus (Y \cup Z)$ ixtiyoriy element bo'lsin. U holda $y \in X$, $y \notin Y \cup Z$ bo'ladi. Bu yerdan $y \in X$, $y \notin Y$, $y \notin Z$ ekanligini, bundan esa $y \in X \setminus Y$, $y \notin Z$

natijada $y \in (X \setminus Y) \setminus Z$ ekanligini olamiz. Demak, $(X \setminus Y) \setminus Z \supset X \setminus (Y \cup Z)$ munosabat o'rinli. Olingan bu ikki munosabatdan $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$ tenglik kelib chiqadi. $\square$

1.6. $(X \cap X_1) \times (Y \cap Y_1) = (X \times Y) \cap (X_1 \times Y_1)$ tenglikni isbotlang.

Isbot. Bu yerda ham 1.5-misoldagi kabi yo'l tutamiz. $\forall (x, y) \in (X \cap X_1) \times (Y \cap Y_1) \Rightarrow x \in X \cap X_1, y \in Y \cap Y_1$. Bu yerdan $x \in X, y \in Y \wedge x \in X_1, y \in Y_1 \Rightarrow (x, y) \in X \times Y \wedge (x, y) \in X_1 \times Y_1$ ekanligini, bundan esa $(x, y) \in (X \times Y) \cap (X_1 \times Y_1)$ ni olamiz. Ya'ni $(X \cap X_1) \times (Y \cap Y_1) \subset (X \times Y) \cap (X_1 \times Y_1)$ munosabat o'rinli. Teskari munosabatni ko'rsatish uchun $(x, y) \in (X \times Y) \cap (X_1 \times Y_1)$ dan orqaga qarab harakatlanish yetarli. Shunday qilib, $(X \cap X_1) \times (Y \cap Y_1) = (X \times Y) \cap (X_1 \times Y_1)$ tenglik isbotlandi. $\square$

1.7. Ixtiyoriy $\{A_n\}$ to'plamlar ketma-ketligi uchun shunday $\{B_n\}$ to'plamlar ketma-ketligini tuzingki.

a) $B_n \subset A_n, B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ bo'lsin:

b) $B_n \supset A_n, B_{n+1} \supset B_n, \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ bo'lsin:

c) $B_n \subset A_n, B_{n+1} \subset B_n, \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ bo'lsin.

Yechish. Berilgan $\{A_n\}$ ketma-ketlik uchun $\{B_n\}$ to'plamlar ketma-ketligini quyidagicha tuzamiz.

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \dots$$

Hosil qilingan $\{B_n\}$ to'plamlar ketma-ketligi misolning a) bandidagi barcha shartlarni qanoatlantiradi. Quyida biz b) va c) banddagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\{B_n\}$ to'plamlar ketma-ketligini keltiramiz:

b) $B_1 = A_1, B_2 = A_1 \cup A_2, \dots, B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k, \dots$

c) $B_1 = A_1, B_2 = A_1 \cap A_2, \dots, B_n = \bigcap_{k=1}^n A_k, \dots$ $\square$

1.8. Ushbu $\left(\frac{m}{n} - \frac{1}{4n^2}, \frac{m}{n} + \frac{1}{4n^2}\right)$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ intervallarning hech biri $\sqrt{2}$ sonini o'z ichiga olmasligini isbotlang. Demak,

$$\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{m}{n} - \frac{1}{4n^2}, \frac{m}{n} + \frac{1}{4n^2}\right) \neq \mathbb{R}.$$

Isbot. $\sqrt{2}$ soni irratsional bo'lganligidan, ixtiyoriy butun m , n sonlari uchun $|m^2 - 2n^2| \neq 0$ bo'ladi. Binobarin $|m^2 - 2n^2| \geq 1$ tengsizlikka kelamiz. Endi ixtiyoriy butun $m \in \mathbb{Z}$ va natural $n \in \mathbb{N}$ sonlari uchun $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| > \frac{1}{4n^2}$ tengsizlikni isbotlaymiz. Bu yerdan

$$\sqrt{2} \notin \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{m}{n} - \frac{1}{4n^2}, \frac{m}{n} + \frac{1}{4n^2}\right).$$

munosabat kelib chiqadi. Agar $m \leq 0$ bo'lsa, u holda ravshanki $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| > \sqrt{2} > 1,4 > \frac{1}{4n^2}$ tengsizlik o'rinli. Demak, $m > 0$ bo'lgan hol, ya'ni $n \in \mathbb{N}$ uchun $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| > \frac{1}{4n^2}$ tengsizlikni isbotlash kifoya. Agar $\frac{m}{n} \geq 2$ bo'lsa, u holda tengsizlik yana o'rinli bo'ladi. Shunday qilib, $n, m \in \mathbb{N}$ va $\frac{m}{n} < 2$ bo'lganda tengsizlikni isbotlash yetarli. U holda

$$\begin{aligned} 1 \leq |m^2 - 2n^2| &\iff \frac{1}{n^2} \leq \left|\frac{m^2}{n^2} - 2\right| = \left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| \left(\frac{m}{n} + \sqrt{2}\right) \leq \\ &\leq (2 + \sqrt{2}) \left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| < 4 \left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right|. \end{aligned}$$

Bundan esa, $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| > \frac{1}{4n^2}$ tengsizligi kelib chiqadi. Shunday qilib, ixtiyoriy $m \in \mathbb{Z}$ va $n \in \mathbb{N}$ uchun

$$\sqrt{2} \notin \left(\frac{m}{n} - \frac{1}{4n^2}, \frac{m}{n} + \frac{1}{4n^2}\right).$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi. $\square$

Uy vazifalari va mavzuni o'zlashtirish uchun masalalar

1.9-1.17-misollarda keltirilgan munosabatlarni isbotlang.

1.9. To'plamlar yig'indisi va kesishmasi assotsiativ.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

1.10. Kesishmaning to'ldiruvchisi to'ldiruvchilar yig'indisiga teng:

$$E \setminus \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (E \setminus A_{\alpha}), \quad A_{\alpha} \subset E. \quad (1.4)$$

$$1.11. A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

$$1.12. A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B).$$

$$1.13. A \setminus B = A \Delta (A \cap B).$$

1.14. Agar $A \subset E$, $B \subset E$ bo'lsa, $(E \setminus A) \Delta (E \setminus B) = A \Delta B$ tenglik o'rinli.

$$1.15. (A \cup B) \Delta (C \cup D) \subset (A \Delta C) \cup (B \Delta D).$$

1.16. A va B to'plamlar uchun $A \subset B \cup (A \Delta B)$ munosabat o'rinli.

1.17. Agar A_1 va A_2 to'plamlar kesishmasa, ixtiyoriy B_1 va B_2 lar uchun $B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$ munosabat o'rinli.

1.18-1.24-misollarda berilgan A va B to'plamlar uchun $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$, $A \cap B$ ko'rinishdagi to'plamlarni toping. 1.23-1.24-misollarda esa $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$, $A \cap B$ to'plamlarni tekislikda tasvirlang.

$$1.18. A = [0, 1], \quad B = (0, 1).$$

$$1.19. A = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}, \quad B = \{3, 6, 9, \dots, 3n, \dots\}.$$

$$1.20. A = \mathbb{Q}, \quad B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} - \text{irratsional sonlar to'plami}.$$

$$1.21. A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \quad B = [0, 1] \cap \mathbb{Q}.$$

$$1.22. A = \{x \in \mathbb{R} : \sin 4x = 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \cos 2x = 0\}.$$

$$1.23. A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x\},$$

$$B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \quad x \leq y \leq 1\}.$$