ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

НАРЗИЛЛАЕВ НУРБЕК ХАМРОҚУЛОВИЧ

ВАЗНЛИ ГРИН ФУНКЦИЯСИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022

УДК: 517.17

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

НАРЗИЛЛАЕВ НУРБЕК ХАМРОҚУЛОВИЧ

ВАЗНЛИ ГРИН ФУНКЦИЯСИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2022

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.4.PhD/FM428 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «ZiyoNet» м ахборот тармоғида (http://www.ziyonet.uz/) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Садуллаев Азимбай** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Ганиходжаев Расул Набиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Шарипов Расулбек Ахмедович физика-математика фанлари фалсафа доктори (PhD)
Етакчи ташкилот:	**Бердақ номидаги Қорақалпоқ давлат университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2022 йил «23» 08 соат 11[00] даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (93 рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998 71) 246 02 24).

Диссертация автореферати 2022 йил «9» 08 куни тарқатилди.

(2022 йил «9» 08 даги 2 рақамли реестр баённомаси).

Б.А.Шоимкулов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси ўринбосари,
ф.-м.ф.д., профессор

Н.К.Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.ф.д. (PhD)

Р.Н.Ганиходжаев
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда плюрипотенциаллар назарияси масалаларига келтирилади. Плюрипотенциаллар назариясида экстремал функциялардаги масалалар биофизика, биотехнология, тиббиёт ҳамда ишлаб чиқариш каби соҳаларнинг тадқиқот объектидир. Кўп ўзгарувчили комплекс фазода плюрипотенциаллар назарияси плюрисубгармоник функциялар синфида қурилиб, комплекс динамик системалар ва функциялар назариясидаги масалаларни ҳал қилишда муҳим рол ўйнайди. Бу назариянинг асосий тушунчалари плюрисубгармоник ўлчов, максимал функция, Грин функцияси, сиғим кабилар классик потенциаллар назарияси тушунчалари каби аниқланади, лекин уларни ўрганиш услублари кўп ўзгарувчили комплекс фазодасининг мураккаб тузилиши туфайли тубдан фарқ қилади ва замонавий математикада долзарб масалаларни ҳал қилишда муҳим аҳамиятга эга ҳисобланади.

Жаҳонда кўп ўзгарувчили комплекс фазода вазнли экстремал Грин функцияси билан боғлиқ масалаларни ечиш ва уларни тадбиқ қилиш бўйича илмий изланишлар олиб борилмоқда. Бу масалаларнинг ечими плюрипотенциаллар назариясининг усуллари орқали ўз ечимини топиб, уларни амалий масалаларни ечишга йўналтирилган кенг қамровли илмий тадқиқот ишлари олиб борилмоқда. Экстремал плюрисубгармоник функциялар ёрдамида комплекс динамик системалар ва функциялар назариясидаги долзарб масалаларни ҳал этишда фойдаланилади. Бунда вазнли экстремал плюрисубгармоник функциялар ва уларнинг хоссалари ёрдамида кўплаб янги илмий натижалар олиш ва уларни функциялар назариясининг долзарб муаммоларини ечишга алоҳида эътибор берилмоқда.

Мамлакатимизда, айниқса, кейинги йилларда фундаментал фанлар, жумладан, тиббиёт ва томография масалаларида илмий-амалий аҳамиятга эга бўлган долзарб йўналишларга эътибор кучайди. Жумладан, охирги йилларда плюрипотенциаллар назарияси, кўп ўлчовли комплекс анализ, аппроксимацион назария ва комплекс динамик системалар назариясига алоҳида эътибор қаратилди. Буларнинг ҳаммаси қаралаётган масалаларнинг долзарблиги ва зарурлигини кўрсатади. Бугунги кунда вазнли Грин функцияларини тадқиқ қилишда муҳим натижаларга эришилди. «Ҳақиқий ўзгарувчили функциялар назарияси, Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси»[1] фанларинингустивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди. Қарор ижросини таъминлашда вазнли Грин функциялари ва плюрипотенциаллар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга ҳисобланади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги ПФ-4947-сонли Фармони, 2017 йил 17 февралдаги

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

«Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-2789-сонли Қарори ва 2020 йил 7 майдаги «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4708-сонли Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги. Диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси.

1972-1982 йиллар давомида плюрипотенциаллар назариясини яратишга қаратилган тадқиқотлар жадал олиб борилди: назариянинг асосий обектлари, масалан, плюригармоник функциялар, плюрисубгармоник функциялар, экстремал плюрисубгармоник функциялар, максимал функциялар, Монже-Ампер тенгламаси, Монже-Ампер оператори, плюрисубгармоник ўлчов, плюриполяр тўпламлар, сийрак тўпламлар, псевдоқавариқ тўпламлар, сиғим катталиклари ва бошқалар киритилди ва ўрганилди. Энг муҳими, бу тадқиқотлар кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назариясида ва комплекс динамик системаларда тўпланган турли муаммоларни ҳал қилишда муваффақиятли қўлланилди.

Плюрисубгармоник функциялар синфига асосланган плюрипотенциаллар назарияси АҚШ, Германия, Туркия, Полша, Швеция, Франция, Россия ва Ўзбекистонлик бир қатор олимлар томонидан, жумладан, Э.Бедфорд, Б.А.Тайлор, Н.Левенберг, Т.Блум, М.Климек, П.Лелон, А.Садуллаев, Э.Б.Сафф, В.Тотик, Й.Сичак, А.Зериахи, В.П.Захарюта, М.А.Алан ва бошқалар томонидан чуқур ўрганилган. $m-$субгармоник функциялар синфида потенциаллар назарияси янги йўналиш бўлиб, бу соҳа бўйича асосан Франция, Польша, Ўзбекистон олимлари илмий изланишлар олиб боришади (Х.Ч.Лу, З.Блоцкий, С. Колодзей, С. Динев, А. Садуллаев, Б. Абдуллаев ва бошқалар).

Й. Сичак (Польша), Н. Левенберг (АҚШ), Т. Блум (Канада) каби математиклар томонидан қаралган вазнли экстремал функциялар Франциялик олим А. Зериаҳи томонидан параболик кўпҳилликларга умумлаштирилди. Кўп ўзгарувчили проектив фазосидаги квазиплюрисубгармоник функциялар синфида вазнли функциялар А. Садуллаев томонидан ҳам тадқиқ қилинган. Маълумки, m-субгармоник функциялар синфи потенциаллар назариясида умумий синф бўлиб, $m=n$ да у плюрисубгармоник функциялар синфи билан $m=1$ бўлган ҳолда эса субгармоник функциялар синфи билан устма-уст тушади. Бу синфда потенциаллар назарияси дастлаб З.Блоцкий, А.Садуллаев, Б.Абдуллаевлар томонидан қурилган. Бу борада кейинчалик бир қатор олимлар жумладан Х.Ч.Лу, С. Колодзей, С. Диневлар томонидан изчил тадқиқотлар олиб борилди. Бу олимлар томонидан кучли m-субгармоник функциялар ва m-субгармоник функцияларнинг турли таърифлари солиштирилиб натижада бу икки функциялар синфи бир бирини ўз ичига олмаслиги исботланган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим ёки илмий-тадқиқот муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Тадқиқот Ўзбекистон Миллий университетининг УТ-ОТ-2020-1 рақамли «Монже-Ампер тенгламаси ва экстремал плюрисубгармоник функциялар» номли илмий лойиҳаси доирасида амалга оширилди.

Тадқиқотнинг мақсади тўпламларнинг регулярлик структураларини экстремал плюрисубгармоник ва m-субгармоник функциялар ёрдамида характерлашга оид масалаларини ечишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат.

$\psi -$ плюрисубгармоник ўлчовни аниқлаш ва бу ўлчовни регулярлигини характерлайдиган янги хоссаларини исботлаш;

δ-экстремал функция $V\left(z,K,\delta,\psi\right)$ ни ўрганиш ва регуляр компакт тўпламлар учун $V^*\left(z,K,\delta,\psi\right)$ функциянинг узлуксизлигини исботлаш;

турли хил δ лар учун компакт тўпламнинг регулярлик структураларини умумий картинасини кўрсатиш;

вазнли δ-экстремал функция $V\left(z,K,\delta,\psi\right)$ ва тўпламнинг сийраклиги орасидаги боғланишни ўрнатиш;

$m-$поляр ва $mw-$поляр тўпламларнинг мос равишда $\mathcal{L}_m -$ ва $\mathcal{L}_{mw} -$ поляр тўпламлар билан эквивалентлигини исботлаш;

$V_m^*\left(z,F,\psi\right)$ ва $V_m^*\left(z,F,\delta,\psi\right)$ вазнли Грин функцияларини аниқлаш ва уларнинг асосий хоссаларини исботлаш;

вазнли $\left(m,\delta\right)$-экстремал функция $V_m\left(z,K,\delta,\psi\right)$ ва тўпламнинг m-сийраклиги орасидаги боғланишни ўрнатиш.

Тадқиқотнинг объекти. Плюрисубгармоник функциялар, $m-$ субгармоник функциялар, суст $m-$субгармоник функциялар, Грин функцияси, Вазнли Грин функцияси, δ-экстремал функция.

Тадқиқотнинг предмети. Турли хил δ лар учун регуляр компакт тўпламининг топологик ва метрик структураларини ўрганиш.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида классик потенциаллар назарияси ва плюрипотенциаллар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат

берилган тўплам регуляр бўлганда унинг вазнли плюрисубгармоник ўлчови бутун фазода узлуксиз бўлиши исботланган;

делта экстремал функция аниқланган ва регуляр компакт тўпламлар учун делта экстремал функциянинг узлуксизлиги исботланган;

турли хил делталар учун компакт тўпламнинг регулярлик структураларини умумий таҳлили кўрсатилган;

вазнли делта экстремал функция ва тўплам сийраклиги орасидаги боғланиши ҳақидаги теорема исботланган;

m-субгармоник функциялар синфида вазнли экстремал функция ва делта экстремал функциялари аниқланган ва вазн функцияси узлуксиз бўлган ҳолда вазнли экстремал функция ва делта экстремал функцияларнинг узлуксиз бўлиши исботланган;

вазн функцияси узлуксиз бўлган ҳолда тўпламнинг локал делта регулярлиги билан локал регулярлиги эквивалент эканлиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

Делта экстремал функциянинг исботланган хоссаларини комплекс динамик системаларда тўла Жулиа тўпламини регулярлигини исботлашда қўлланилган.

кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назариясида кўп ўзгарувчили голоморф фукцияларни голоморф давом эттиришда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик-физика, классик потенциаллар назарияси, плюрипотенциаллар назарияси ва кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назариясининг маълум усулларидан фойдаланилганлиги ва делта экстремал функциянинг плюрисубгармоник функциялар синфида ва m-субгармоник функциялар синфида ўрганилганлиги ва олинган натижаларнинг қатъий математик исботи билан берилганлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти плюрисубгармоник функциялар ва $m-$ субгармоник функциялар синфида киритилган вазнли Грин функцияси классик Грин функциясининг умумлашмаси бўлиб, маълум бир турдаги вазнларда классик Грин функциянинг хоссаларидан фарқли хоссаларга эгалиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти математик физика, кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси ва комплекс динамик системаларда турли хил масалаларни ечишда тадбиқ қилишда асос бўлиб хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Кўп ўзгарувчили комплекс фазосида вазнли экстремал функциялар бўйича олинган натижалар асосида:

плюсубгармоник функциялар синфида аниқланган вазнли Грин функциянинг хоссаларидан Ўзбекистон Миллий университетининг ОТ-Ф4-(37+29) рақамли «A-аналитик функцияларнинг функционал хоссалари ва уларнинг тадбиқлари. Матрицавий соҳаларда комплекс анализнинг баъзи масалалари» номли грантида A-аналитик функцияларнинг функционал хоссаларини исботлашда фойдаланилган. (Ўзбекистон Миллий университетининг 2021 йил 5 ноябрдаги 04/11-7066 рақамли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши A-аналитик функцияларнинг функционал хоссаларини исботлашда аниқ усул топиш имконини берган.

m-субгармоник функциялар синфида аниқланган вазнли m-Грин функциянинг хоосаларидан ЎзР ФА Хоразм Маъмун академиясининг ФА-Ф-4-002 рақамли «m-субгармоник функциялар ва уларнинг калибрланган геометрияга тадбиқлари» номли грантида m-субгармоник функциялар синфида потенциаллар назариясини қуришда фойдаланилган. (Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг 2021 йил 17 ноябрдаги 2/1255-3200 рақамли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши m-субгармоник функциялар синфида потенциаллар назариясини қуриш учун керак бўладиган асосий теоремаларни исботлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 9 та илмий анжуманларда, жумладан 4 та халқаро ва 5 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 15 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та мақола, жумладан, 1 таси хорижий ва 5 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 89 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «$\mathbb{C}^n$ **фазосида вазнли Грин функцияси**» деб номланувчи биринчи боби олтита параграфдан иборат. Диссертациянинг ушбу бобида плюрипотенциаллар назариясининг зарур тушунчалари ва ёрдамчи натижалари келтирилган. Бу бобда плюрисубгармоник функцияларнинг ва Грин функциясининг асосий хоссалари келтирилган. Бундан ташқари, $m-$ субгармоник функцияларнинг таърифи ва унинг бир қатор асосий хоссаларини келтирдик. Биринчи бобнинг охирги 1.5 ва 1.6 бўлимлари Комплекс динамик системаларида тадбиқи бордиги учун муҳим саналади. Биринчи бобнинг 1.1 ва 1.2 бўлимларида келтирилган тушунча ва тасдиқлар умумий тушунчалар бўлиб биз уни А.Садуллаев, Дж.Демайи, Е. Чирка, Б. Шабат монографияларидан келтирдик, 1.3 ва 1.4 бўлимлардаги натижалар эса Б. Абдуллаев мақолаларидан келтирдик. Бироқ, 1.5 ва 1.6 бўлимлардаги натижалар янги бўлиб бу натижалар диссертант Н.Нарзиллаевнинг ва К.Кулдошевнинг маколаларидан келтирилган.

Таъриф 1.1. Агар $u(z): D \to \left[-\infty, +\infty\right)$ функция қуйидаги икта шартни

1) $u(z)$ функция D соҳада юқоридан ярим узлуксиз яъни, $\overline{\lim_{z \to z^0}} u(z) \le u\left(z^0\right),\ z^0 \in D$;

2) ихтиёрий $l: z = z^0 + w\xi,\ w \in \mathbb{C}^n, \xi \in \mathbb{C},$ комплекс тўғри чизиқ учун $u\Big|_l = u\left(z^0 + w\xi\right)$ функция $l \bigcap D$ да субгармоник;

қаноатлантирса, у ҳолда бу функция D соҳада плюрисубгармоник функция деб аталади.

Маълумки, $u(z) \in psh\left(\mathbb{C}^n\right)$ функция учун шундай C_u сон тоапилиб

$$u(z) \le C_u + \ln^+\left|z\right|,\ \ z \in \mathbb{C}^n,$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда бу функция ўсиши логарифмик бўлган функция дейилади. Бу ерда $\ln^+\left|z\right| = \max\left\{\ln\left|z\right|, 0\right\}$. барча шундай функциялар синфини $\mathcal{L}$ билан белгилаймиз. Шунингдек $\mathcal{L}^+$ билан қуйидаги

$$\mathcal{L}^+ := \left\{u(z) \in psh\left(\mathbb{C}^n\right), c_u + \ln^+\left|z\right| \le u(z) \le C_u + \ln^+\left|z\right|\right\}$$

синфни белгилаймиз.

Тайинланган $K \subset \mathbb{C}^n$ компакт тўплам учун қуйидаги

$$V\left(z, K\right) = \sup\left\{u(z) : u(z) \in \mathcal{L},\ u(z)\Big|_K \le 0\right\}$$

функцияни қараймиз.

У ҳолда қуйидаги регуляризацияланган

$$V^*\left(z, K\right) = \overline{\lim_{w \to z}} V\left(w, K\right)$$

функция, K компактнинг *Грин функцияси* дейилади.

Таъриф 1.6. Агар $V^*\left(z^0, K\right) = 0$ бўлса, у ҳолда $K \subset \mathbb{C}^n$ компакт $z_0 \in K$ нуқтада *глобал плюрирегуляр* дейилади. Агар ихтиёрий $B\left(z^0, r\right), r > 0$ шар учун $V^*\left(z^0, K \cap B\left(z^0, r\right)\right) = 0$ бўлса, у ҳолда $K \subset \mathbb{C}^n$ компакт $z_0 \in K$ нуқтада *локал плюрирегуляр* дейилади. K компакт ҳар бир нуқтасида глобал плюрирегуляр бўлса, у ҳолда K *глобал плюрирегуляр* компакт дейилади. K компакт ҳар бир нуқтасида локал плюрирегуляр бўлса, у ҳолда K *локал плюрирегуляр* компакт дейилади.

Таъриф 1.8. Агар $u \in L^1_{loc}(D)$ функция қуйидаги икта

1) $u(z)$ функция D соҳада юқоридан ярим узлуксиз яъни, $\overline{\lim_{z \to z^0}} u(z) \le u\left(z^0\right),\ z^0 \in D$;

2) ихтиёрий икки марта дифференциалланувчи $v_1,\dots,v_{m-1}\in sh_m(D)$ функциялар учун қуйидагича аниқланувчи

$$\left[dd^c u\wedge dd^c v_1\wedge\dots\wedge dd^c v_{m-1}\wedge\beta^{n-m}\right](\omega)=$$
$$=\int\limits_{\omega\in F^{0,0}} udd^c v_1\wedge\dots\wedge dd^c v_{m-1}\wedge\beta^{n-m}\wedge dd^c\omega,\ \omega\in F^{0,0},$$

$dd^c u\wedge dd^c v_1\wedge\dots\wedge dd^c v_{m-1}\wedge\beta^{n-m}$ оқим мусбат аниқланган;

шартни қаноатлантирса, у ҳолда бу функция D соҳада $m-$*субгармоник* функция деб аталади.

Айтайлик, $K\subset\mathbb{C}^n$ компактда $\psi(z)$ чегараланган функция берилган бўлсин.

Қуйидаги функциялар синфини қарайлик

$$\mathcal{L}\left(K,\psi\right):=\left\{u(z)\in\mathcal{L},\,u(z)\Big|_K\le\psi(z)\right\}$$

ва $V\left(z,K,\psi\right):=\sup\left\{u(z):u(z)\in\mathcal{L}\left(K,\psi\right)\right\},\ z\in\mathbb{C}^n$ бўлсин.

У ҳолда $V^*\left(z,K,\psi\right)=\overline{\lim_{w\to z}}V\left(w,K,\psi\right)$ функция K компактнинг $\psi(z)$ га нисбатан *вазнли Грин функцияси* деб аталади. Шуни таъкидлаш керакки, $\psi(z)\equiv0$ бўлса, $V^*\left(z,K,\psi\right)$ функция $V^*\left(z,K\right)$ Грин функцияси билан устма-уст тушади яъни $V^*\left(z,K,0\right)\equiv V^*\left(z,K,\psi\right)$.

Маълумки, ихтиёрий $K\subset\mathbb{C}^n$ компакт тўплам учун қуйидаги

$$V^*\left(z,K\right)+\inf_{z\in K}\psi(z)\le V^*\left(z,K,\psi\right)\le V^*\left(z,K\right)+\sup_{z\in K}\psi(z)\qquad(1.3)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Агар $\psi(z)$ функция бутун $\mathbb{C}^n$ фазога $\mathcal{L}$ синфга тегишли бўлган ҳолда давом этса, яъни агар

$$\exists\,\Psi\in\mathcal{L}:\ \Psi\,|_K\equiv\psi,\qquad(1.4)$$

у ҳолда, равшанки, $V\left(z,K,\psi\right)\ge\Psi(z)$ ва

$$V\left(z,K,\psi\right)=\psi(z)\quad\forall z\in K.\qquad(1.5)$$

Бироқ, агар (1.4) шарт бажарилмаса, у ҳолда умуман айтганда (1.5) ўринли эмас.

Мисол 1.1. Айтайлик $K=\left\{\left|z\right|\le1\right\}\subset\mathbb{C}$ *ва* $\psi(z)=1-\left|z\right|^2$ бўлсин. У ҳолда максимум принцпига кўра

$$V\left(z,K,\psi\right)=V\left(z,K,0\right)=V\left(z,K\right)=\ln^+\left|z\right|.$$

Натижада, $V\left(z,K,\psi\right)=0<\psi(z)\ \ \forall\left|z\right|<1.$

Юқоридаги мисолдан кўринадики регулярлик тушунчасини киритиш учун Грин функцияси (1.5) шартни бажаради деб фараз қиламиз.

Таъриф 1.13. Агар $V^*\left(z^0,K,\psi\right)=\psi\left(z^0\right)$. бўлса, у ҳолда $K\subset\mathbb{C}^n$ компакт $z_0\in K$ нуқтада *глобал ψ-регуляр* дейилади. Агар ихтиёрий $B\left(z^0,r\right), r>0$ шар учун $V^*\left(z^0,K\cap B\left(z^0,r\right)\right)=0$ бўлса, у ҳолда $K\subset\mathbb{C}^n$ компакт $z_0\in K$ нуқтада *локал ψ-регуляр* дейилади.

Қуйидаги теоремада турли хил вазн функциялар учун локал регулярлик ҳақида гап кетади.

Теорема 1.4. *Агар K – компакт тўплам ва вазн функция $\psi(z)\in C\left(K\right)$ бўлса, у ҳолда K тўплам $z^0\in K$ нуқтада локал ψ-регуляр бўлиши учун унинг z^0 нуқтада локал плюрирегуляр ($\psi\equiv 0$ бўлган ҳол) бўлиши зарур ва етарли.*

Айтайлик $D\subset\mathbb{C}^n$ – чегараланган регуляр соҳа, $E\subset D$ – ихтиёрий тўплам ва $\psi(z)$ – D соҳада қатъий манфий плюрисубгармоник функция бўлсин.

$$\mathcal{U}\left(E,D,\psi\right)=\left\{u(z)\in psh(D):u(z)\Big|_E\le\psi(z),\, u(z)\Big|_D<0\right\}$$

ва

$$\omega\left(z,E,D,\psi\right)=\sup\left\{u(z):u(z)\in\mathcal{U}\left(E,D,\psi\right)\right\},$$

$$\omega^*\left(z,E,D,\psi\right)=\overline{\lim_{w\to z}}\,\omega\left(w,E,D,\psi\right)$$

деб оламиз.

Таъриф 1.14. $\omega^*\left(z,E,D,\psi\right)$ функция E тўпламнинг D соҳага нисбатан *ψ-плюрисубгармоник ўлчови* дейилади.

Қайд этиш керакки, $\omega^*\left(z,E,D,-1\right)$ функция плюрипотенциаллар назариясидаги машҳур гармоник ўлчов билан устма-уст тушади, яъни $\omega^*\left(z,E,D,-1\right)=\omega^*\left(z,E,D\right)$.

Теорема 1.5. *Айтайлик $\psi\in C(K)$ ва $z^0\in K\subset D$ бўлсин. z^0 нуқта фақат ва фақат $\omega^*\left(z,K,D\right)$ $\mathcal{P}$ – ўлчовга нисбатан локал регуляр бўлгандагина локал ψ-регуляр бўлади.*

Теорема 1.6. *Фараз қилайлик K — ψ-регуляр компакт ва $\psi(z)$ функция K да узлуксиз бўлсин. У ҳолда $\omega^*\left(z,K,D,\psi\right)\equiv\omega\left(z,K,D,\psi\right)\in C\left(\bar{D}\right)$ бўлади.*

Диссертациянинг «$\mathbb{C}^n$ **фазода δ-экстремал функция**» деб номланган иккинчи боби учта параграфдан иборат. Ушбу бобда $V\left(z,K,\delta,\psi\right)$ δ-экстремал функция тадқиқ қилинган.

$V\left(z,K,\psi\right)$ Грин вазн функцияси, худди экстремал функция каби, $\mathcal{L}:=\left\{u(z)\in psh\left(\mathbb{C}^n\right):u(z)\le C_u+\ln^+\left|z\right|,\, z\in\mathbb{C}^n\right\}$ Лелон синфи ёрдамида аниқланади (§ 1.4). Қуйида биз, агар экстремал функцияни

$\mathcal{L}^{\delta}:=\left\{u(z)\in psh\left(\mathbb{C}^n\right): u(z)\le C_u+\delta\ln^{+}\left|z\right|,\, z\in\mathbb{C}^n\right\},\ \ \delta>0$ синфдан фойдаланиб аниқланилса, унда биз δ-экстремал функция $V\left(z,K,\delta,\psi\right)$ деб номланувчи ва $V\left(z,K,\psi\right)$ функциядан мутлақо фарқ қилувчи бошқа функцияни ҳосил қиламиз. Биринчи бўлиб М. Алан томонидан пайқалган ушбу феномен бизни $V\left(z,K,\delta,\psi\right)$ δ-экстремал функциянинг табиатини батафсил очиш томон етаклади.

Айтайлик $K\subset\mathbb{C}^n$ – компакт ва $\psi(z)$ – K да аниқланган бирор чегараланган функция бўлсин. Қуйидаги Лелон синфининг умумлашмасини қарайми

$$\mathcal{L}^{\delta}:=\left\{u(z)\in psh\left(\mathbb{C}^n\right): u(z)\le C_u+\delta\ln^{+}\left|z\right|,\, z\in\mathbb{C}^n\right\},\, \delta>0.$$

Равшанки, $\mathcal{L}^1=\mathcal{L}$ ва агар $v(z)\in\mathcal{L}$ бўлса, унда $c\cdot v(z)\in\mathcal{L}^{\delta}$ бўлади, бунда $0<c\le\delta$. Қуйидаги белгилашни киритамиз

$$\mathcal{L}^{\delta}\left(K,\psi\right):=\left\{u(z)\in\mathcal{L}^{\delta},\, u(z)\Big|_K\le\psi(z)\right\}$$

Таъриф 2.1. $V^*\left(z,K,\delta,\psi\right)=\overline{\lim_{w\to z}}V\left(w,K,\delta,\psi\right)$ функцияга K нинг $\psi(z)$ вазнли *δ-экстремал функцияси дейилади,* бу ерда

$$V\left(z,K,\delta,\psi\right):=\sup\left\{u(z): u(z)\in\mathcal{L}^{\delta}\left(K,\psi\right)\right\},\, z\in\mathbb{C}^n.$$

Таъриф 2.2. Агар $V^*\left(z^0,K,\delta,\psi\right)=\psi\left(z^0\right)$ бўлса, у ҳолда K компакт z^0 нуқтада *глобал (δ,ψ)-регуляр* дейилади. Агарда ихтиёрий $B\left(z^0,r\right), r>0$ шар учун $V^*\left(z^0,K\cap B\left(z^0,r\right),\delta,\psi\right)=\psi\left(z^0\right)$ бўлса, у ҳолда K компакт z^0 нуқтада *локал (δ,ψ)-регуляр* дейилади.

Теорема 2.1. Айтайлик K *– компакт тўплам ва вазн функция $\psi(z)$, K тўпламда $\psi(z)\in C(K)$, $V\left(z,K,\delta,\psi\right)=\psi(z)\ \ \forall z\in K$ шартни бажарсин. у ҳолда K тўплам $z^0\in K$ нуқтада локал (δ,ψ)-регуляр бўлиши учун унинг z^0 нуқтада локал $(\delta,0)$-регуляр бўлиши зарур ва етарли.*

Теорема 2.2. Айтайлик $\psi(z)\in C(K)$ *бўлсин. Агар K глобал (δ,ψ)-регуляр бўлса яъни ҳар қандай $z^0\in K$ нуқтада (δ,ψ)-регуляр бўлса, у ҳолда $V^*\left(z,K,\delta,\psi\right)=V\left(z,K,\delta,\psi\right)$ ва $V^*\left(z,K,\delta,\psi\right)$ функция $\mathbb{C}^n$ фазода узлуксиз бўлади.*

Шуни таъкидлаш жоизки, умумий ҳолда $V\left(z,K,\delta,\psi\right)$ ва вазн функцияси K тўпламда барча δ лар учун устма-уст тушиши шарт эмас. Ҳаттоки баъзи $\delta>0$ лар учун $V\left(z,K,\delta,\psi\right)\Big|_K\equiv\psi(z)$, бошқа $\delta>0$ лар учун эса тенглик ўринли бўлмаслиги мумкин. Бошқача айтганда (2.2) шарт шундай $\delta>0$ лар учун бажарилмаслиги мумкин.

Мисол 2.1. *Айтайлик* $K = \overline{B}(0,1)$ *ва* $\psi(z) = \left|z\right|^2$ *бўлсин. У ҳолда* $0 < \delta \le 2$ *учун исботлаш мумкинки*

$$V\left(z,K,\delta,\psi\right) = \begin{cases} \left|z\right|^2, & \left|z\right| \le \sqrt{\dfrac{\delta}{2}}, \\ \delta\ln\left|z\right| + \dfrac{\delta}{2} - \dfrac{\delta}{2}\ln\left|\dfrac{\delta}{2}\right|, & \left|z\right| > \sqrt{\dfrac{\delta}{2}}. \end{cases}$$

Кўриниб турибдики $V\left(z,K,\delta,\psi\right) = \left|z\right|^2$, $\forall z \in \left\{\left|z\right| \le \sqrt{\dfrac{\delta}{2}}\right\}$ ва $V\left(z,K,\delta,\psi\right) < \left|z\right|^2$, $\forall z \in \left\{\sqrt{\dfrac{\delta}{2}} < \left|z\right| \le 1\right\}$. $\delta > 2$ бўлганда эса

$$V\left(z,K,\delta,\psi\right) = \begin{cases} \left|z\right|^2, & \left|z\right| \le 1, \\ \delta\ln\left|z\right| + 1, & \left|z\right| > 1. \end{cases}$$

Шундай қилиб, $\delta \ge 2$ бўлганда $V\left(z,K,\delta,\psi\right) = \psi\left(z\right)$ $\forall z \in K$, $\delta < 2$ бўлганда эса $V\left(z,K,\delta,\psi\right)$ Грин функцияси K тўпламда $\psi\left(z\right)$ вазн функция билан устма-уст тушмайди.

$\Lambda\left(K,\psi\right)$ **тўплам.** $\Lambda = \Lambda\left(K,\psi\right)$ билан (2.2) тенглик бажариладиган δ лар тўпламини белгилаймиз, яъни

$$\Lambda = \Lambda\left(K,\psi\right) = \left\{\delta > 0 : V\left(z,K,\delta,\psi\right)_K \equiv \psi(z)\right\}.$$

Алан мисолида $\Lambda = \left[2,+\infty\right)$. Ростдан ҳам

$$V\left(z,K,2,\psi\right) = \begin{cases} \left|z\right|^2, & \left|z\right| \le 1, \\ 2\ln\left|z\right| + 1, & \left|z\right| > 1, \end{cases}$$

ва $V\left(z,K,2,\psi\right)\Big|_K \equiv \psi(z)$. 2.1 бўлимдаги 1) хоссага кўра барча $\delta \in \left[2,+\infty\right)$ учун $V\left(z,K,\delta,\psi\right) \ge V\left(z,K,2,\psi\right)$ ва $\delta \ge 2$ учун $V\left(z,K,\delta,\psi\right) = \psi(z)$ $\forall z \in K$. Агар $\delta \in \left(0,2\right)$ бўлса, у ҳолда шундай $z^0 \in K$ нуқта мавжудки $V\left(z^0,K,\delta,\psi\right) < \psi\left(z^0\right)$, яъни $\left(0,2\right) \cap \Lambda = \varnothing$.

Λ тўплами бўш тўплам бўлиши мумкин. Масалан, $K = \left\{\left|z\right| \le 1\right\} \subset \mathbb{C}$ ва $\psi(z) = 1 - \left|z\right|^2$ бўлганда, 3) хоссага кўра

$$V\left(z,K,\delta,\psi\right) = V\left(z,K,\delta\right) = \delta \cdot V\left(z,K\right) = \delta \cdot \ln^+\left|z\right|.$$

Шунинг учун ҳар қандай $\delta > 0$ лар учун $V\left(z,K,\delta,\psi\right) < \psi(z)$, $\forall\left|z\right| < 1$, яъни, бу ҳолда $\Lambda = \varnothing$.

$\Lambda = (0,+\infty)$ бўлиши ҳам мумкин. Масалан, $\psi(z) \equiv c$ бўлганда, бу ерда

c – ўзгармас сон,

$$V\left(z,K,\delta,c\right)=c+V\left(z,K,\delta\right)=c+\delta\cdot V\left(z,K\right).$$

$V\left(z,K\right)\geq 0$ бўлганлиги учун ихтиёрий $\delta>0$ ва $z\in K$ учун $V\left(z,K,\delta,c\right)=c$. Бу эса $\Lambda=(0,+\infty)$ эканлигини англатади.

Айтайлик $\Lambda\neq\varnothing$ бўлсин. Агар $\delta\in\Lambda$ бўлса, у ҳолда барча $\delta_1>\delta$ лар учун 1) хоссадан осонгина $\delta_1\in\Lambda$ эканлиги келиб чиқади. Бошқа томондан эса, қуйидаги тасдиқ ўринлидир.

Тасдиқ 2.1. Агар $j\to\infty$ *да* $\delta_j\in\Lambda,\forall j\in\mathbb{N}$ *и* $\delta_j\downarrow\delta_0\not\asymp 0$ *бўлса, у ҳолда* $\delta_0\in\Lambda$.

(δ,ψ)**-регулярлик.** Биз $\Lambda\left(K,\psi\right)$ тўпламни $V\left(z,K,\delta,\psi\right)=\psi(z)$, $z\in K$, $\delta\in\Lambda\left(K,\psi\right)$ шарт бажарилиши учун киритдик.

Таъриф 2.3. Айтайлик $\delta\in\Lambda\left(K,\psi\right)$ бўлсин. Агар $V^*\left(z^0,K,\delta,\psi\right)=\psi\left(z^0\right)$ бўлса, у ҳолда $K\subset\mathbb{C}^n$ компакт $z_0\in K$ нуқтада *глобал* (δ,ψ)*-регуляр* дейилади. Агар ихтиёрий $B\left(z^0,r\right),r>0$ шар учун $V^*\left(z^0,K\cap\overline{B}\left(z^0,r\right),\delta,\psi\right)=\psi\left(z^0\right)$ бўлса, у ҳолда $K\subset\mathbb{C}^n$ компакт $z_0\in K$ нуқтада *локал* (δ,ψ)*-регуляр* дейилади. K компакт ҳар бир нуқтасида глобал (δ,ψ)-регуляр бўлса, у ҳолда K *глобал* (δ,ψ)*-регуляр* компакт дейилади. K компакт ҳар бир нуқтасида локал (δ,ψ)-регуляр бўлса, у ҳолда K *локал* (δ,ψ)*-регуляр* компакт дейилади.

Шуни таъкидлаш жоизки, глобал ва локал (δ,ψ)-регулярлик фақат $\delta\in\Lambda$ бўлгандагина кирилтиш мумкин. Осонгина тушуниш мумкинки, ҳар қандай локал(δ,ψ)**-регуляр нуқта, глобал** (δ,ψ)-регуляр нуқта ҳам бўлади. $\Lambda_{reg}=\Lambda_{reg}\left(K,\psi\right)$ билан K компакт глобал регуляр бўладиган барча $\delta\subset\Lambda$ ларни белгилаймиз, $\Lambda_{reg}^{loc}=\Lambda_{reg}^{loc}\left(K,\psi\right)$ билан эса K компакт локал регуляр бўладиган барча $\delta\subset\Lambda$ ларни белгилаймиз, равшанки, $\Lambda_{reg}^{loc}\subset\Lambda_{reg}\subset\Lambda$.

Тасдиқ 2.2. *Айтайлик* $\delta_1,\delta_2\in\Lambda$ *ва* $\delta_1\leq\delta_2$ *бўлсин. Агар* z^0 *нуқта* $\left(\delta_2,\psi\right)$*-регуляр нуқта бўлса, у ҳолда у* $\left(\delta_1,\psi\right)$*-регуляр нуқта ҳам бўлади.*

Теорема 2.3. *Айтайлик* $\delta\in\Lambda$ *ва* $\psi(z)$ *функция* K *компактда узлуксиз функция бўлсин.* $z^0\in K\subset\mathbb{C}^n$ *нуқта локал* (δ,ψ)*-регуляр бўлиши учун унинг локал плюрирегуляр нуқта бўлиши зарур ва етарли.*

Натижа 2.1. *Айтайлик* $\delta_1,\delta_2\in\Lambda$ *ва* $\psi(z)$ *функция* K *компактда узлуксиз функция бўлсин.* $z^0\in K\subset\mathbb{C}^n$ *нуқта локал* $\left(\delta_1,\psi\right)$*-регуляр бўлиши учун унинг локал* $\left(\delta_2,\psi\right)$*-регуляр нуқта бўлиши зарур ва етарли.*

Тасдиқ 2.3. Айтайлик, $j \to \infty$ *да* $\delta_j \in \Lambda_{reg}$, $\forall j \in \mathbb{N}$ *ва* $\delta_j \uparrow \delta$ *бўлсин, у ҳолда* $\delta \in \Lambda_{reg}$.

Натижа 2.2. *Агар* $\Lambda = \left[\delta_0, \infty\right)$ *бўлса, у ҳолда* $\Lambda_{reg} = \begin{cases} \text{ёки } \left[\delta_0, \delta_1\right], \\ \text{ёки } \left[\delta_0, \infty\right). \end{cases}$

Агар $\Lambda = \left(0, \infty\right)$ *бўлса, у ҳолда* $\Lambda_{reg} = \begin{cases} \text{ёки } \left(0, \delta_1\right], \\ \text{ёки } \left(0, \infty\right). \end{cases}$

δ-экстремал функциянинг кейинги хоссалари сийрак тўпламлар билан боғлиқ.

Таъриф 2.4. Айтайлик, $E \subset \mathbb{C}^n$ тўплам ва E' – унинг лимит нуқталари тўплами бўлсин. Агар қуйидаги шартлардан бири бажарилганда, яъни, $z^0 \not\in E'$ ёки $z^0 \in E'$ бўлиб, шундай U атроф ва $u(z) \in psh(U)$ функция топилиб, $\overline{\lim\limits_{\substack{z \to z^0 \\ z \in E \setminus \{z^0\}}}} u(z) < u\left(z^0\right)$ бўлса, у ҳолда E тўплам z^0 нуқтада сийрак дейилади.

Сийраклик ва регулярлик. Классик потенциаллар назариясида сийраклик ва регулярлик орасида ажойиб боғланиш бор. Комплекс текисликда ($n = 1$ бўлган ҳол), қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 2.4. $z^0 \in K$ *нуқта* $K \subset \mathbb{C}$ *компактнтнг локал иррегуляр нуқтаси бўлиши учун, у* K *компактнинг сийрак нуқтаси бўлиши зарур ва етарли.*

Кўп ўлчовли фазо бўлган ҳолда бу даъвонинг фақат бир томони ўринли, яъни, $z^0 \in K$ нуқтанинг (δ, ψ)-регуляр бўлишининг зарурий шарти бор.

Теорема 2.5. *Айтайлик,* z^0 *нуқта* K *компактнинг сийрак нуқтаси бўлсин. У ҳолда* z^0 *нуқта,* K *компактнинг локал* (δ, ψ)*-иррегуляр нуқтаси бўлади. Бу ерда* $\psi \in C(K)$ *ва* $\delta \in \Lambda$.

Бошқача айтганда, $z^0 \in K$, $V^*\left(z^0, K, \delta, \psi\right) = \psi\left(z^0\right)$, *бўлиши учун* z^0 *нуқта* K *компактнинг сийрак нуқтаси бўлмаслиги керак.*

Қуйидаги мисолда кўринадики, $n > 1$ бўлганда теорема 2.5. иккинчи томонга умуман айтганда ўринли эмас.

Мисол 2.4. *Айтайлик,* $(\delta, \psi) = (1, 0)$ *ва*

$K = \left\{\left(z_1, z_2\right) \in \mathbb{C}^2 : \left|z\right| \le 1\right\} \cup \left\{\left(z_1, z_2\right) \in \mathbb{C}^2 : z_2 = 0,\ \left|z_1\right| \le 2\right\}$ *бўлсин.*

Бу ерда K компакт $\mathbb{C}^2$ фазодаги бирлик шар ва плюриполяр тўпламнинг бирлашмасидан иборат. Шундай экан

$$V(z,K)=\begin{cases}\ln^+|z|, & z_2\neq 0\\ \ln^+\left|\dfrac{z_1}{2}\right|, & z_2=0.\end{cases}$$

ва $V^*\left(z,K\right)=\ln^+|z|$.

$(2,0)\in K$ – иррегуляр нуқта, чунки, $V^*\left((2,0),K\right)=\ln 2>0$. Бироқ, бу нуқта мисол 2.2. га кўра сийрак нуқта эмас .

Учинчи боб «$m-$**субгармоник функциялар синфида вазнли Грин функцияси**» деб номланади ва уч параграфдан иборат. $m-$ **субгармоник** $\left(sh_m\right)$ функциялар синфини $1\le m<n$ ҳол учун ўрганиш плюрисубгармоник (psh) функциялар синфини $\left(m=n\right)$ ўрганишдан бир қанча фарқ қилади. Айниқса, Грин функциясининг хоссаларида ва компактларнинг регулярлигини таҳлил қилганда бу фарқлар яққол кўринади. Гап шундаки, Грин функциясини таърифлашда ушбу $\left(dd^c\omega(z)\right)^m\wedge\left(dd^c|z|^2\right)^{n-m}$ операторнинг фундаментал ечими асосий аҳамиятга эга. $m=n$ бўлган ҳолда (плюрисубгармоник функция ҳолида) ечим $\omega(z)=const\cdot\ln|z|$ кўринишда бўлади ва $z\to\infty$ да у ҳам $+\infty$ га интилади, $1\le m<n$ ҳолда эса фундаментал ечим $\omega_m(z)=-\dfrac{const}{|z|^{2\left(n/m-1\right)}}$, $\left(dd^c\omega_m\right)^m\wedge\left(dd^c|z|^2\right)^{n-m}=\delta_0$ кўринишда ифодаланади, бунда эса δ_0 – Дирак мераси бўлиб, у чегараланмагандир.

Таҳлил шуни кўрсатадики, $1\le m<n$ бўлган ҳолда Грин функциясини ўрганиш ўзгача ёндашув ва ўзгача усулларни талаб этади. Диссертациянинг ушбу боби вазнли Грин функциясининг хоссаларига ва $\mathbb{C}^n$ да компактларнинг $m-$регулярлиги ҳақидаги саволларга бағишланган. 2 Бобда плюрисубгармоник функциялар синфи ($m=n$ бўлган ҳол) қаралган, Бу бобда $1\le m<n$ бўлган ҳол учун $m-$субгармоник функциялар синфини қараймиз.

Лелон синфи. $1\le m<n$ ҳол учун Лелон синфини қуйидагича аниқлаш қулайдир:

$$\mathcal{L}_m=\left\{u(z)\in sh_m\left(\mathbb{C}^n\right):\ \ u(z)\le 1\right\}.$$

У ҳолда $K_m(z)=-\dfrac{1}{|z|^{2\left(n/m-1\right)}}+1\in\mathcal{L}_m$ муносабат бажарилади ва

$$\left(dd^cK_m\right)^m\wedge\left(dd^c|z|^2\right)^{n-m}=0,\ z\in\mathbb{C}^n\setminus\left\{0\right\}$$

ўринли бўлади.

Натижада, $K_m(z)$ функция да $\mathbb{C}^n\setminus\left\{0\right\}$ максимал $m-$субгармоник функция бўлади. Кейинчалик $K_m(z)$ функцияси Грин синфини ўрганишда кўп қўлланилади. Эсладиб ўтамизки, $m=n$ бўлган ҳолда $sh_m = psh$ бўлади ва $\mathcal{L}_m$ синфи тривиал бўлади, $\mathcal{L}_m = \left\{const\right\}$.

sh_m синфда ёки $m - wsh$ синфда $m-$Грин функциясини ўрганишда қуйидаги теорема катта аҳамиятга эга.

Теорема 3.1. *Агар $E \subset \mathbb{C}^n$ тўплам $m-$поляр ёки $mw-$поляр бўлса, у ҳолда у $\mathcal{L}_m$ $-$ поляр ёки $\mathcal{L}_{mw}$ $-$ поляр бўлади. Бошқача қилиб айтганда, бирор $u(z) \in sh_m\left(\mathbb{C}^n\right)$ функция учун $u(z) \not\equiv -\infty$, $u\big|_E = -\infty$ бажарилса, у ҳолда шундай $w(z) \in \mathcal{L}_m$ топиладики, $w(z) \not\equiv -\infty$, $w\big|_E = -\infty$ ўринли бўлади. Агар $u(z) \in m - wsh\left(\mathbb{C}^n\right)$ топилиб, $u(z) \not\equiv -\infty$, $u\big|_E = -\infty$ бажарилса, у ҳолда шундай $w(z) \in \mathcal{L}_{mw}$ топиладики, $w(z) \not\equiv -\infty$, $w\big|_E = -\infty$ ўринли бўлади. Бунда $\mathcal{L}_{mw} = \left\{u(z) \in m - wsh\left(\mathbb{C}^n\right):\ \ u(z) \le 1\right\}$.*

Вазнли Грин функцияси. $E \subset \mathbb{C}^n$ тўпламни фиксирлаймиз ва E да чегараланган $\psi(z)$ фунцйияни қараймиз. Грина функцияси $\mathcal{L}_m = \left\{u(z) \in sh_m\left(\mathbb{C}^n\right):\ \ u(z) \le 1\right\}$ Лелон синфи орқали аниқлангани учун, 1 дан ошмайдигин функцияни қарашимиз зарур. Шу сабабли $\psi(z) < 1$ деб оламиз.

Қуйидаги синфни қарайлик:

$$\mathcal{L}_m\left(E,\psi\right) := \left\{u(z) \in \mathcal{L}_m,\, u(z)\big|_E \le \psi(z)\right\}.$$

Юқоридаги синф орқали ушбу

$$V_m\left(z,E,\psi\right) := \sup\left\{u(z) : u(z) \in \mathcal{L}_m\left(E,\psi\right)\right\},\ z \in \mathbb{C}^n$$

функцияни тузиб оламиз.

У ҳолда регуляризацияланган $V_m^*\left(z,E,\psi\right) = \overline{\lim_{w\to z}} V_m\left(w,E,\psi\right)$ функция K компактнинг $\psi(z)$ вазн функцияга нисбатан *вазнли $m-$ Грин функцияси* дейилади.

Қуйида вазнли $m-$Грин функциясининг исботлаш қийин бўлмаган бир қанча хоссаларини келтириб ўтамиз:

1) $V_m^*\left(z,E,\psi\right) \in \mathcal{L}_m$ *функция максимал бўлади, яъни*

$\mathbb{C}^n \setminus \bar{E}$ *да* $\left(dd^c V_m^*\left(z,E,\psi\right)\right)^m \wedge \left(dd^c\left|z\right|^2\right)^{n-m} = 0$ *бажарилади* (қ. [57]).

2) $1 \ge V_m^*\left(z,E,\psi\right) \ge \inf\limits_E \psi\left(z\right)$ *Грин функциясини қарайлик.*

$V_m^*\left(z,E,\psi\right) \equiv 1$ бўлиши учун E –тўпламнинг $\mathbb{C}^n$ да $m-$поляр бўлиши зарур ва етарли.

3) $E_1 \subset E_2$ *тўпламлар берилган бўлиб,* $\psi(z)$ *функция* E_2 *да аниқланган бўлсин. У ҳолда* $V_m\left(z,E_1,\psi\right) \geq V_m\left(z,E_2,\psi\right)$ *муносабат ўринли бўлади.* $\mathcal{L}_m\left(E_1,\psi\right) \supset \mathcal{L}_m\left(E_2,\psi\right)$ муносабат ўринлилигидан келиб чиқади.

4) *Агар* $\psi_1 \leq \psi_2$ $\forall z \in E$ *бажарилса, у ҳолда* $V_m\left(z,E,\psi_1\right) \leq V_m\left(z,E,\psi_2\right)$ *келиб чиқади.* $\mathcal{L}_m\left(E,\psi_1\right) \subset \mathcal{L}_m\left(E,\psi_2\right)$ муносабат ўринлилигдан келиб чиқади.

Лемма 3.1. *Ҳар қандай* $E \subset \mathbb{C}^n$ *тўплам учун қуйидаги тенгсизликлар ўринли:*

$$\inf_{z\in E}\psi(z) + \left(1 - \inf_{z\in E}\psi(z)\right)\cdot V_m\left(z,E\right) \leq V_m\left(z,E,\psi\right) \leq$$
$$\leq \left(1 - \sup_{z\in E}\psi(z)\right)\cdot V_m\left(z,E\right) + \sup_{z\in E}\psi(z), \qquad \forall z \in \mathbb{C}^n. \tag{3.1}$$

Натижа 3.1. *Ҳар қандай* $E \subset \mathbb{C}^n$ *тўплам учун қуйидаги тенгсизликлар ўринли:*

$$\inf_{z\in E}\psi(z) + \left(1 - \inf_{z\in E}\psi(z)\right)\cdot V_m^*\left(z,E\right) \leq V_m^*\left(z,E,\psi\right) \leq$$
$$\leq \left(1 - \sup_{z\in E}\psi(z)\right)\cdot V_m^*\left(z,E\right) + \sup_{z\in E}\psi(z), \qquad \forall z \in \mathbb{C}^n. \tag{3.2}$$

Натижа 3.2. $V_m^*\left(z,E,\psi\right) \equiv 1$ *бўлиши учун* $V_m^*\left(z,E\right) \equiv 1$ *бажарили зарур ва етарли.*

Регуляр компактлар. Ҳудди 2 бобдаги каби, регуляр компактларни ўрганиш учун $F \subset \mathbb{C}^n$ – компакт тўплам деб ва $\psi(z)$ функцияни $\mathbb{C}^n$ га $\mathcal{L}_m$ синфнинг функцияси каби давом этади деб олайлик, яъни

$$\Psi \in \mathcal{L}_m : \Psi\,|_F \equiv \psi. \tag{3.3}$$

функция мавжуд деб қараймиз.

У холда равшанки, $V_m\left(z,F,\psi\right) \geq \Psi(z)$ бажарилади ва

$$V_m\left(z,F,\psi\right) \equiv \psi(z),\ z \in K \tag{3.4}$$

муносабат ўринли бўлади.

Таьриф 3.1. Агар $V_m^*\left(z^0,F,\psi\right) = \psi\left(z^0\right)$ шарт ўринли бўлса, F компакт тўпламни z^0 нуқтада *глобал* $\left(m,\psi\right)$*-регуляр* дейилади. Агар ҳар қандай шар $B\left(z^0,r\right)$, $r > 0$ учун $V_m^*\left(z^0,F \cap \overline{B}(z^0,r),\psi\right) = \psi\left(z^0\right)$ бажариладиган бўлса, F компакт тўпламни z^0 нуқтада *локал* (m,ψ)*-регуляр* дейилади.

Теорема 3.2. *Айтайлик* $\psi(z)$ *функция* F *да аниқланган узлуксиз функция бўлсин. Агар* F *тўплам ўзининг ҳар бир* $z^0 \in F$ *нуқтасида глобал* (m,ψ)*-регуляр бўладиган бўлса, у ҳолда* $V_m^*\left(z,F,\psi\right) = V_m\left(z,F,\psi\right)$ *тенглик ўринли* *бўлади ва $V_m^*\left(z,F,\psi\right)$ функция $\mathbb{C}^n$ да узлуксиз бўлади.*

Теорема 3.3. *Айтайлик F – компакт тўплам бўлсин ва $\psi(z)$ – F даги вазн функцияси бўлсин: $\psi(z)\in C(F)$. F тўпламнинг $z^0\in F$ да локал (m,ψ)-регуляр бўлиши учун унинг z^0 да F нинг локал m-регуляр ($\psi\equiv 0$ бўлган ҳолдаги каби) бўлиши зарур ва етарли.*

K – бирор компакт тўплам ва ψ – F тўпламда чегараланган бирор функция бўлсин. Айтайлик, $\psi(z)<\delta$. Қуйидаги синфни қараймиз

$$\mathcal{L}_m^\delta\left(F,\psi\right):=\left\{u(z)\in\mathcal{L}_m^\delta,\, u(z)\Big|_F\le\psi(z)\right\}.$$

Таьриф 3.2.

$$V_m\left(z,F,\delta,\psi\right):=\sup\left\{u(z):u(z)\in\mathcal{L}_m^\delta\left(F,\psi\right)\right\},\ z\in\mathbb{C}^n$$

функция орқали аниқланган $V_m^*\left(z,F,\delta,\psi\right)=\overline{\lim_{w\to z}}V_m\left(z,F,\delta,\psi\right)$ функцияга ψ га нисбатан F компакт тўпламнинг (m,δ) – *Грин функцияси* дейилади.

Лемма 3.2. *Ҳар қандай F компакт тўплам ва ҳар қандай чегараланган $\psi(z)<\delta$ функция учун қуйидаги тенгсизлик ўринли:*

$$\begin{aligned}&\inf_{z\in F}\psi(z)+\left(\delta-\inf_{z\in F}\psi(z)\right)\cdot V_m^*\left(z,F\right)\le V_m^*\left(z,F,\delta,\psi\right)\le\\&\le\sup_{z\in F}\psi(z)+\left(\delta-\sup_{z\in F}\psi(z)\right)\cdot V_m^*\left(z,F\right).\end{aligned}\tag{3.6}$$

Ҳудди psh функциялардаги ($m=1$ бўлган ҳолат) каби бу ерда ҳам $F\subset\mathbb{C}^n$ компакт тўпламларнинг регулярлиги ҳақидаги савол муҳим ҳисобланади. Ушбу масалаларда биринчи муаммо $V_m\left(z,F,\delta,\psi\right)\Big|_F\equiv\psi$ шартнинг бажарилишидир. Гап шундаки, агар, масалан $F^0\neq\varnothing$ бирор ички нуқтани ўз ичига олувчи F компакт тўплам бўлсин ва вазн функцияси F^0 да максимум принципини бажармасин, яъни бирор $z^0\in F^0$ нуқтада $\psi\left(z^0\right)>\sup_{z\in F}\psi\left(z\right)$ бўлсин. У ҳолда максимум принципи $\mathcal{L}_m^\delta$ синфда доим қуйидаги кўринишда ифодаланади $V_m\left(z^0,F,\delta,\psi\right)\le\sup_{z\in F}V_m\left(z,F,\delta,\psi\right)\le\sup_{z\in F}\psi\left(z\right)<\psi\left(z^0\right)$. Бундан ташқари, юқорида айтганимиздек, psh функцияларда ($m=1$ ҳолда) ҳатто F компактнинг бирор атрофида плюрисубгармоник бўлган $\psi(z)$ вазн функцияси учун максимум принципи ўринли бўлганда ҳам, умумий ҳолатда $V_m\left(z,F,\psi,\delta\right)$ функция ҳам, ψ вазн функцияси ҳам ҳар қандай δ да F нинг ҳамма ерида айнан тенг бўлиши шарт эмас. Бошқача қилиб айтганда, $V_m\left(z,F,\delta,\psi\right)\Big|_F\equiv\psi$ шарт бажарилмаслиги ҳам мумкин.

Мисол 3.1. $F=\overline{B}(0,1)\subset\mathbb{C}^2$ *бўлсин ва* $\psi(z)=\left|z\right|^2-1$ *бўлсин. У ҳолда* *қуйидагини исботлаш қийин эмас:*

$0<\delta\leq 1$ *бўлган ҳол учун*

$$V_1\left(z,F,\delta,\psi\right)=\begin{cases}\left|z\right|^2-1, & \left|z\right|^2\leq\dfrac{1+\delta}{2},\\ \delta\left(1-\dfrac{\left(1+\delta\right)^2}{4\delta\left|z\right|^2}\right), & \left|z\right|^2>\dfrac{1+\delta}{2}\end{cases}$$

ва $\delta>1$ *ҳол учун*

$$V_1\left(z,F,\delta,\psi\right)=\begin{cases}\left|z\right|^2-1, & \left|z\right|^2\leq 1,\\ \delta\left(1-\dfrac{\left(1+\delta\right)^2}{4\delta\left|z\right|^2}\right), & \left|z\right|^2>1.\end{cases}$$

$\Lambda_m\left(F,\psi\right)$ **тўплам.** $\Lambda_m=\Lambda_m\left(F,\psi\right)$ орқали (3.3) даги тенгликни қаноатлантирадиган $\delta>0$ сонлар тўпламини белгилаймиз, яъни

$$\Lambda_m=\left\{\delta>0: V_m\left(z,F,\delta,\psi\right)\Big|_F\equiv\psi(z)\right\}.$$

3.1 мисолда $\Lambda_m=[1,+\infty)$.

Λ_m тўплам бўш бўлиши ҳам, бутун $(0,\infty)$ тўплам бўлиши ҳам мумкин.

Айтайлик $K=\left\{\left|z\right|\leq 1\right\}\subset\mathbb{C}^n$ *ва* $\psi_\delta(z)=\dfrac{1-\left|z\right|^2}{2}\delta,\ \delta>0$ *бўлсин.*

Максимум принципига кўра

$$V_m\left(z,F,\delta,\psi_\delta\right)=V_m\left(z,F,\delta,0\right)=\delta V_m\left(z,F\right)=\delta\max\left\{0,K_m(z)\right\}.$$

Негаки, юқорида айтганимиздек $K_m(z)$ максимал функция бўлади ва $V_m\left(z,F\right)=\max\left\{0,K_m(z)\right\}$ ўринли бўлади. Натижада

$$V_m\left(z,F,\delta,\psi_\delta\right)=\delta\max\left\{0,K_m(z)\right\}=\delta\max\left\{0,-\frac{1}{\left|z\right|^{2\left(n/m-1\right)}}+1\right\},\ 1\leq m<n$$

Муносабатга эга бўламиз.

Бундан эса ҳар қандай $\delta>0$ учун ҳарқандай $\forall\left|z\right|<1$ да $V_m\left(z,F,\delta,\psi\right)<\psi(z)$ бажарилади ва бу ҳолда $\Lambda_m=\varnothing$ бўлади.

Агар бирор $c<\delta$ – ўзгармас сон учун $\psi(z)\equiv c$ деб олсак, у ҳолда $V_m\left(z,F,\delta,c\right)=c+V_m\left(z,F,\delta\right)=c+\delta V_m\left(z,F\right)$ бажарилади. Бинобарин m-Грин функцияси учун $V_m\left(z,F\right)\geq 0$ бажарилади ва ҳар қандай $\delta>0$, ҳар қандай $z\in F$ учун $V_m\left(z,F,\delta,c\right)\geq c$ тенгсизлик ўринли бўлади. Яъниким, $\Lambda_m=(0,+\infty)$ бажарилади.

Айтайлик, $\Lambda_m\neq\varnothing$ бўлсин. У ҳолда $V_m\left(z,F,\delta,\psi\right)$ нинг хоссаларидан агар $\psi(z)<\delta$ бўлса ва $\delta\in\Lambda_m$ бўлса у ҳолда барча $\delta_1>\delta$ лад учун $\delta_1\in\Lambda$

муносабатлар ўринли бўлишини келтириб чиқариш қийин эмас.

Тасдиқ 3.1. *Агар* $\delta_j \in \Lambda_m$, $\forall j \in \mathbb{N}$ *сонлар учун* $j \to \infty$ *да* $\delta_j \downarrow \delta_0 \not\equiv 0$ *бажарилса, у ҳолда* $\delta_0 \in \Lambda$ *муносабат ўринли бўлади.*

$(m,\delta,\psi)-$**регулярлик.** Ҳудди юқоридаги каби $V_m^*\left(z,F,\delta,\psi\right)$ функцияни ўрганишда ҳам $\psi\left(z\right) < \delta$ шарт бажарилиши талаб қилинади.

Таъриф 3.4. Айтайлик $\delta \in \Lambda_m\left(\psi,F\right)$ бўлсин. F компакт тўплам учун $z^0 \in F$ нуқтада $V_m^*\left(z^0,F,\psi,\delta\right) = \psi\left(z^0\right)$ тенглик ўринли бўлса, бу F тўплам $z^0 \in F$ нуқтада *глобал* (m,δ,ψ)*-регуляр* дейилади. Ушбу F тўплам $z^0 \in F$ нуқтада ҳар қандай бўш бўлмаган $B\left(z^0,r\right)$ шар учун $V_m^*\left(z^0,F\cap\overline{B}\left(z^0,r\right),\delta,\psi\right) = \psi\left(z^0\right)$ шартни қаноатлантирса, бу тўплам $z^0 \in F$ нуқтада *локал* (m,δ,ψ)*-регуляр* дейилади. F компакт тўплам ўзининг ҳар бир нуқтасида глобал (m,δ,ψ)-регуляр бўлса, бу тўплам *глобал* (m,δ,ψ)*-регуляр* дейилади. Бу F тўплам ўзининг ҳар бир нуқтасида локал (m,δ,ψ)-регуляр бўлса, бу тўплам *локал* (m,δ,ψ)*-регуляр* дейилади.

Тасдиқ 3.3. *Айтайлик* $\delta_1,\delta_2 \in \Lambda_m\left(\psi,F\right)$ *сонлар* $\delta_1 \le \delta_2$. *муносабатда бўлишсин. Агар* z^0 *нуқта* $-\left(m,\delta_2,\psi\right)$*-регуляр бўлса, у ҳолда бу нуқта* $\left(m,\delta_1,\psi\right)$ *-регуляр ҳам бўлади.*

Теорема 3.4. *Айтайлик* $\delta \in \Lambda\left(\psi,F\right)$ *бўлсин ва* $\psi(z)$ *функция* F *да узлуксиз бўлсин. Бирор фиксирланган нуқта* $z^0 \in F \subset \mathbb{C}^n$ *локал* (m,δ,ψ)*-регуляр бўлиши учун унинг локал* m*-регуляр бўлиши зарур ва етарли. Аниқроқ қилиб айтганда, ҳар қандай* $r > 0$ *учун* $V_m^*\left(z^0,F\cap\overline{B}\left(z^0,r\right),\delta,\psi\right) = 0$ *бажарилишида ҳар қандай* $r > 0$ *учун* $V_m^*\left(z^0,F\cap\overline{B}\left(z^0,r\right)\right) = 0$ *бажарилиши зарур ва етарлидир.*

Натижа 3.3. *Айтайлик* $\delta_1,\delta_2 \in \Lambda\left(\psi,F\right)$ *бўлсин ва* $\psi(z)$ *функция* F *да узлуксиз бўлсин. Бирор фиксирланган нуқта* $z^0 \in F \subset \mathbb{C}^n$ *локал* $\left(m,\delta_1,\psi\right)$*-регуляр бўлиши учун унинг локал* $\left(m,\delta_2,\psi\right)$*- регуляр бўлиши зарур ва етарли.*

Албатта, бу ерда ушбу $\psi(z) < \min\left\{\delta_1,\delta_2\right\}$ шартнинг бажарилиши зарурдир.

Энди биз вазнли $(m,\delta)-$Грин функцияси билан $m-$сийрак тўплам орасидаги боғланишни ўрганамиз.

Таъриф 3.5. Айтайлик, $E \subset \mathbb{C}^n$ тўплам ва E' – унинг лимит нуқталари тўплами бўлсин. Агар қуйидаги шартлардан бири бажарилганда, яъни,

$z^0 \not\in E'$ ёки $z^0 \in E'$ бўлиб, шундай U атроф ва $u(z) \in sh_m\left(U\right)$ функция топилиб, $\overline{\lim\limits_{\substack{z\to z^0 \\ z\in E\setminus\{z^0\}}}} u(z) < u\left(z^0\right)$ бўлса, у ҳолда E тўплам z^0 нуқтада m-сийрак дейилади.

Тасдиқ 3.5. *Агар $E \subset \mathbb{C}^n$ тўплам ўзининг бирор лимит нуқтаси $z^0 \in E$ да m–сийрак бўлса, у ҳолда*

$$\overline{\lim_{\substack{z\to z^0 \\ z\in E\setminus\{z^0\}}}} u(z) < u\left(z^0\right)$$

Тенгсизликни қаноатлантирадиган бирор m-субгармоник $u \in \mathcal{L}_m$ функция топилади.

Теорема 3.6. *Агар z^0 $-F$ тўпламнинг m–сийрак нуқтаси бўлса, у ҳолда бу z^0 нуқта F тўпламнинг (m,δ,ψ)–иррегуляр нуқтаси бўлади. Бунда $\psi \in L^\infty(F)$ ва $\delta \in \Lambda_m$ деб олинган.*

ХУЛОСА

Умуман олганда, диссертациядан олинган натижалар диссертация ишининг мақсадига эришилганлиги ҳақида гапиришга имкон беради. Барча асосий натижалар янги ва биргаликда потенциаллар назариясига маълум бир хисса қўшади. Диссертация иши вазнли экстремал функцияларни ўрганишга бағишланган. Тадқиқот ишининг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 1.5. *Айтайлик* $\psi \in C(K)$ *ва* $z^0 \in K \subset D$ *бўлсин.* z^0 *нуқта фақат ва фақат* $\omega^*\left(z, K, D\right)$ $\mathcal{P}-$*ўлчовга нисбатан локал регуляр бўлгандагина локал* ψ*-регуляр бўлади.*

2. Қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 2.2. Айтайлик $\psi(z) \in C(K)$ *бўлсин. Агар* K *глобал* (δ,ψ)*-регуляр бўлса яъни ҳар қандай* $z^0 \in K$ *нуқтада* (δ,ψ)*-регуляр бўлса, у ҳолда* $V^*\left(z,K,\delta,\psi\right) = V\left(z,K,\delta,\psi\right)$ *ва* $V^*\left(z,K,\delta,\psi\right)$ *функция* $\mathbb{C}^n$ *фазода узлуксиз бўлади.*

3. $\Lambda_{reg} = \Lambda_{reg}\left(K,\psi\right)$ тўпламнинг тўлиқ структураси кўрсатилган:

агар $\Lambda = \left[\delta_0, \infty\right)$ *бўлса , у ҳолда* $\Lambda_{reg} = \begin{cases} \text{ёки } \left[\delta_0, \delta_1\right], \\ \text{ёки } \left[\delta_0, \infty\right); \end{cases}$

агар $\Lambda = \left(0, \infty\right)$*, бўлса , у ҳолда* $\Lambda_{reg} = \begin{cases} \text{ёки } \left(0, \delta_1\right], \\ \text{ёки } \left(0, \infty\right). \end{cases}$

4. δ-экстремал функциянинг сийрак тўплам билан боғлиқ хоссаси исботланган.

5. $\mathbb{C}^n$ фазода $m-$ субгармоник функциялар синфида вазнли Грин функцияси аниқланган ва унинг потенциал хоссалари, жумладан, максималлиги, узлуксизлиги ва бошқа хоссалари исботланган.

6. Вазнли $\left(m,\delta\right)-$Грин функцияси турли хил $\delta > 0$ ларда қаралган ва $\delta \in \Lambda\left(\psi, F\right)$ бўлганда $K \subset \mathbb{C}^n$ компактнинг локал (m,δ,ψ)-регулярлиги ҳақидаги қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 3.4. *Айтайлик* $\delta \in \Lambda\left(\psi, F\right)$ *бўлсин ва* $\psi(z)$ *функция* F *да узлуксиз бўлсин. Бирор фиксирланган нуқта* $z^0 \in F \subset \mathbb{C}^n$ *локал* (m,δ,ψ)*-регуляр бўлиши учун унинг локал* m*-регуляр бўлиши зарур ва етарли.*

7. m – сийраклик ҳақида Бедфорд теоремасининг аналоги исботланган ва ундан фойдаланиб қуйидаги теорема исботланган:

Теорема 3.6. *Агар* z^0 $-F$ *тўпламнинг* m*–сийрак нуқтаси бўлса, у ҳолда бу* z^0 *нуқта* F *тўпламнинг* (m,δ,ψ)*–иррегуляр нуқтаси бўлади. Бунда* $\psi \in L^\infty(F)$ *ва* $\delta \in \Lambda_m$.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

НАРЗИЛЛАЕВ НУРБЕК ХАМРОКУЛОВИЧ

ФУНКЦИЯ ГРИНА С ВЕСОМ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент – 2022 год

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.4.PhD/FM428

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (http://www.ziyonet.uz/).

Научный руководитель:	**Садуллаев Азимбай** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Ганиходжаев Расул Набиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Шарипов Расулбек Ахмедович кандидат физико-математических наук (PhD)
Ведущая организация:	**Каракалпакский государственный университет им. Бердаха.**

Защита диссертации состоится «23» 08 2022 года в 14[00] на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № 93). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+998 71) 246 02 24).

Автореферат диссертации разослан « 9 » 08 2022 года.
(протокол рассылки № 2 от « 9 » 08 2022 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

Б.А.Шоимкулов
Заместитель председателя Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Н.К.Мамадалиев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.ф.-м.н. (PhD)

Р.Н.Ганиходжаев
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Теория плюрипотенциалов занимает особое место во многих научно-практических исследованиях, проводимых во всем мире. Теория плюрипотенциала созданная в 80х годах прошлого века, успешно развивается, является предметом исследований многих зарубежных и отечественных научных центров. Теория плюрипотенциала строится в классе плюрисубгармонических функций в комплексном многомерном пространстве $\mathbb{C}^n$. Основные понятия этой теории – плюрисубгармоническая мера, максимальные функции, функция Грина, емкость и др. Вводятся также как аналогичные понятия классической теории потенциала, однако методы их изучений существенно отличаются, в связи со сложной комплексной структурой пространства $\mathbb{C}^n$.

В настоящее время решение задач, связанных с весовой экстремальной функцией Грина, является одной из актуальных проблем теории плюрипотенциалов. Во всем мире проводятся глубокие научные исследования для решения актуальных проблем теории функций. Решение этих проблем находится методами теории плюрипотенциалов, и ведется большая научно-исследовательская работа, направленная на решение практических задач. Экстремальные плюрисубгармонические функции являются важными понятиями теории плюрипотенциалов, с помощью которых доказываются основные теоремы теории плюрипотенциалов. Получение многих новых научных результатов с помощью весовых экстремальных плюрисубгармонических функций и их свойств, а также применение их к решению актуальных задач теории функций является сегодня одним из целевых научных исследований.

В нашей стране большое внимание уделялось и продолжает уделяться фундаментальным наукам, имеющим прикладное значение. Весовая экстремальная функция Грина имеет ряд приложений в многомерном комплексном анализе, теории приближений, математической физике и теории сложных динамических систем. Все это показывает актуальность и необходимость рассматриваемых вопросов. Применение теории плюрипотенциалов используется в точных и естественных науках, в том числе при изучении динамических систем и функций со многими комплексными переменными. Проведение научных исследований на международном уровне по важным направлениям специальности «Теория функций действительного переменного, Теория функций комплекного переменного» рассматривается как основная задача фундаментальных исследований[1]. Развитие теории весовые экстремальные функции играют важную роль при исполнении этого постановления.

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы.

В течении 1976-82 годов проводилось интенсивное исследование, направленное на построение теории плюрипотенциала: были введены и изучены основные объекты теории такие, как плюригармонические функции, плюрисубгармонические функции, экстремальные плюрисубгармонические функции, максимальние функции, уравнение Монже-Ампера, оператор Монже-Ампера, плюриполярные множества, разреженные множества, псевдовыпуклие множества, емкостные величины и др. Самое важное, эти исследования успешно применялись в решении различных проблем, накопившихся в многомерном комплексном анализе и в самой теории плюрисубгармонических функций.

Экстремальные функции в классе плюрисубгармонических функций изучены в работах ряда ученых из США, Германии, Турции, Польши, Швеции, Франции, России, Узбекистана такими как Э.Бедфорд, Б.А.Тайлор, З.Блоцки, Н.Левенберг, Т.Блум, М.Климек, П.Лелон, А.Садуллаев, Э.Б.Сафф, В.Тотик, Й.Сичак, А.Зериахи, В.П.Захарюта, М.А.Алан и др. Теория $m-$ субгармонических функций и комплексные уравнения в гессианах развивались начиная с 2006 года, в основном, в работах польских, французских и узбекских математиков (С.Динев, З.Блоцки, С.Колодзей, Х.Ч.Лу, А.Садуллаев и Б.Абдуллаев и др.).

Недавно был достигнут значительный прогресс в изучении весовой теории плюрипотенциала, которая была первоначально развита в работах Й. Сичака, Н. Левенберга, Т. Блума и была обобщена в работе А. Зериахи на параболические многообразия. На проективным пространстве $\mathbb{P}^n$, основанная на квазиплюрисубгармонических функциях, весовые функции исследованы в работе Садуллаева. Отметим, что класс sh_m функций является более общим классом субгармонических и плюрисубгармонических функций; при $m=n$ он совпадает с классом плюрисубгармонических, а при $m=1-$ с классом субгармонических функций. В этом классе теорию потенциалов впервые разработали З. Блоцкий, А. Садуллаев, Б. Абдуллаев.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждением высшего образования, где выполнялась диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования УТ-ОТ-2020-1 «Уравнение Монжа-Ампера и экстремальные плюрисубгармонические функции» Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (2020 – 2022 гг.).

Целью исследования является изучение функции Грина с весом в классе плюрисубгармонических (psh) и $m-$ субгармонических $\left(sh_m\right)$ функций, исследование регулярности компактов с помощью экстремальных плюрисубгармонических функций.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

определение ψ –плюрисубгармонической меры и доказательство ряда новых свойств, характеризующих регулярность этой меры;

изучение δ-экстремальной функции $V\left(z,K,\delta,\psi\right)$ и доказательство непрерывности функций $V^*\left(z,K,\delta,\psi\right)$ для регулярных компактов;

показать общую картину структуры регулярности компактов для различных δ;

установить связь между весовой δ-экстремальной функцией Грина с разреженностью множеств;

доказать эквивалентность m – полярных и mw – полярных множеств с $\mathcal{L}_m$ – и $\mathcal{L}_{mw}$ – полярными множествами, соответственно;

определение весовых функций Грина $V_m^*\left(z,F,\psi\right)$ и $V_m^*\left(z,F,\delta,\psi\right)$, доказательство их основных свойств;

установить связь между весовой (m,δ)-функцией Грина с m-разреженностью множеств.

Объект исследования являются плюрисубгармонические функции, $m-$ субгармонические функции, слабо $m-$субгармонические функции, функция Грина, функция Грина с весом, δ-экстремальная функция.

Предмет исследования являются изучение топологической и метрической структуры регулярности компактов для различных δ.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы классической теории потенциала и теории плюрипотенциала.

Научная новизна исследования состоят в следующим:

доказано, что в случае регулярности данного множества его весовая плюрисубгармоническая мера непрерывна во всем пространстве;

определена дельта-экстремальная функция и доказана непрерывность дельта-экстремальной функции для регулярных компактов;

показан общий анализ структур регулярности компакта для различных дельт;

доказана теорема о связи весовой дельта-экстремальной функции с разреженностью множества;

В классе m-субгармонических функций определены весовая экстремальная функция и дельта-экстремальная функция и доказана непрерывность весовой экстремальной функции и дельта-экстремальной функции, если весовая функция непрерывна;

доказано, что локальная регулярность множества эквивалентна локальной дельта-регулярности множества, если весовая функция непрерывна;

Практические результаты исследования. Доказанные свойства δ-экстремальных функций $V^*\left(z,K,\delta,\psi\right)$ могут быть использованы при решении различных задач комплексных динамических систем, многомерного комплексного анализа и в их приложениях.

Достоверность результатов исследования обосновывается применением известных методов математической физики, классической теории потенциала, теории плюрипотенциала и теории функций многих комплексных переменных, изучением δ-экстремальных функций в классе плюрисубгармонических и $m-$субгармонических функций и строгими математическими доказательствами полученных результатов. Кроме того, публикации результатов диссертации в научных журналах с импакт-факторами, апробации работы в научных семинарах и конференциях доказывает достоверность результатов диссертации.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Функция Грина с весом в классе плюрисубгармонических и $m-$субгармонических функций могут быть применены в математической физике, в теории функций многих комплексных переменных и в теории комплексных динамических систем.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

1. Из свойств весовой функции Грина, определенных в классе плюсгармонических функций, использовались в гранте ОТ-Ф4-(37+29) «Функциональные свойства A-аналитических функций и их применения. Некоторые задачи комплексного анализа в матричных областях», для доказательства функциональных свойств аналитических функций (Справка от 5 ноября 2021 года, Национальный Университет Узбекистана). Результаты диссертации позволили доказать ряд функциональных свойств A-аналитических функций.

2. Из свойств весовой функции Грина, определенных в классе $m-$субгармонических функций, были использованы для построения теории потенциалов в классе $m-$субгармонических функций в гранте ФА-Ф-4-002 «$m-$субгармонические функции и их приложения к калиброванной геометрии» (Справка от 17 ноября 2021 года Академия Наук Республики Узбекистан). Результаты, полученные в диссертации позволило доказать основные теоремы, необходимые для построения теории потенциалов в классе $m-$субгармонических функций.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 4 международных и 5 республиканских научно-практических конференциях, регулярно на городском научном семинаре академика А. Садуллаева, на совместном научном семинаре Ургенч и филиал ИМ (руководитель д.ф.-мат наук. Б.Абдуллаев), на городском научном семинаре по функционалному анализу и его приложениям (руководитель д.ф.-мат наук. профессор, В.И. Чилин).

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 15 научные работ, из них 6 в научных изданиях, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе, 1 опубликована в зарубежном журнале и 5 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на одиннадцать параграфов, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 89 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «**Функция Грина с весом в пространстве** $\mathbb{C}^n$», приведены необходимые понятия и вспомогательные результаты по теории плюрипотенциала. В этой предварительной главе мы приводим основные свойства плюрисубгармонических функций и функции Грина. Кроме того, мы даем определение $m-$субгармонических функций, сформулируем ряд их основных свойств. Последние параграфы 1.5 и 1.6 главы I посвящены экстремальным функциям с весовой функцией $\psi(z)$, которые стали актуальными, в связи с их применениями в Комплексных динамических системах. Многие приведенные в параграфах 1.1 и 1.2 понятия и утверждения общеизвестны, мы их заимствовали из монографий А.Садуллаева, Дж.Демайи, Е.Чирки и Б.Шабата, а результаты параграфы 1.3 и 1.4 из статей Абдуллаева. Однако результаты параграфа 1.5 и 1.6 является новыми и приведены в статьях диссертанта Н.Нарзиллаева и Н.Нарзиллаева, К.Кулдашева.

Определение 1.1. Функция $u(z):D\to\left[-\infty,+\infty\right)$ называется *плюрисубгармонической* в области $D\subset\mathbb{C}^n$, если она удовлетворяет следующим двум условиям:

1) $u(z)$ полунепрерывна сверху в D, т.е. $\overline{\lim_{z\to z^0}} u(z) \le u\left(z^0\right),\ z^0 \in D$;

2) для любой комплексной прямой $l: z = z^0 + w\xi,\ w \in \mathbb{C}^n, \xi \in \mathbb{C}$, функция $u\Big|_l = u\left(z^0 + w\xi\right)$ субгармонична на $l \bigcap D$.

Напомним, функция $u(z) \in psh\left(\mathbb{C}^n\right)$ называется функцией логарифмического роста, если существует такая константа C_u, что

$$u(z) \le C_u + \ln^+\left|z\right|,\ z \in \mathbb{C}^n,$$

где $\ln^+\left|z\right| = \max\left\{\ln\left|z\right|, 0\right\}$. Семейство всех таких функций называется классом Лелона и обозначается через $\mathcal{L}$. Введем класс $\mathcal{L}^+$ следующим образом:

$$\mathcal{L}^+ := \left\{u(z) \in psh\left(\mathbb{C}^n\right),\ c_u + \ln^+\left|z\right| \le u(z) \le C_u + \ln^+\left|z\right|\right\}.$$

Для фиксированного компактного множества $K \subset \mathbb{C}^n$ положим

$$V\left(z, K\right) = \sup\left\{u(z) : u(z) \in \mathcal{L},\ u(z)\Big|_K \le 0\right\}.$$

Тогда регуляризация

$$V^*\left(z, K\right) = \overline{\lim_{w\to z}} V\left(w, K\right)$$

называется *функцией Грина* компакта K.

Определение 1.6. Компакт $K \subset \mathbb{C}^n$ называется *глобально плюрирегулярным* в точке z_0, если $V^*\left(z^0, K\right) = 0$. Он называется *локально плюрирегулярным* в точке z_0, если $V^*\left(z^0, K \cap B\left(z^0, r\right)\right) = 0$ для любого шара $B\left(z^0, r\right), r > 0$. Компакт K называется *глобально плюрирегулярным*, если он глобально плюрирегулярен в каждой точке. Компакт K называется *локально плюрирегулярным*, если он локально плюрирегулярен в каждой точке.

Определение 1.8. Функция $u \in L^1_{loc}(D)$ называется *$m-$ субгармонической* в области $D \subset \mathbb{C}^n$, если она

1) полунепрерывна сверху, $\overline{\lim_{z\to z^0}} u(z) \le u\left(z^0\right),\ z^0 \in D$;

2) для любых дважды непрерывно дифференцируемых $sh_m(D)$ функций $v_1, \dots, v_{m-1}$ поток $dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{m-1} \wedge \beta^{n-m}$, определяемый как

$$\left[dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{m-1} \wedge \beta^{n-m}\right](\omega) =$$
$$= \int\limits_{\omega \in F^{0,0}} u dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \wedge dd^c \omega,\ \omega \in F^{0,0},$$

положителен.

Пусть $\psi(z)$ – ограниченная функция на компактном множестве $K \subset \mathbb{C}^n$. Рассмотрим класс функций

$$\mathcal{L}\left(K, \psi\right) := \left\{u(z) \in \mathcal{L},\, u(z)\Big|_K \le \psi(z)\right\}$$

и

$$V\left(z, K, \psi\right) := \sup\left\{u(z) : u(z) \in \mathcal{L}\left(K, \psi\right)\right\},\ z \in \mathbb{C}^n.$$

Тогда $V^*\left(z, K, \psi\right) = \overline{\lim_{w \to z}} V\left(w, K, \psi\right)$ называется весовой функцией Грина компакта K относительно $\psi(z)$. Следует отметить, что в случае $\psi(z) \equiv 0$ функция $V^*\left(z, K, \psi\right)$ совпадает с функцией Грина $V^*\left(z, K\right)$ т.е. $V^*\left(z, K, 0\right) \equiv V^*\left(z, K, \psi\right)$.

Ясно, что для любого компактного множества $K \subset \mathbb{C}^n$ выполняются неравенства

$$V^*\left(z, K\right) + \inf_{z \in K} \psi(z) \le V^*\left(z, K, \psi\right) \le V^*\left(z, K\right) + \sup_{z \in K} \psi(z) \tag{1.3}$$

Если функция $\psi(z)$ продолжается на все пространство $\mathbb{C}^n$ как функция из класса $\mathcal{L}$, т.е. если

$$\exists\, \Psi \in \mathcal{L} :\ \Psi\, |_K \equiv \psi, \tag{1.4}$$

то, очевидно, $V\left(z, K, \psi\right) \ge \Psi(z)$ и

$$V\left(z, K, \psi\right) = \psi(z) \quad \forall z \in K. \tag{1.5}$$

Однако если условие (1.4) не выполняется, то равенство (1.5), вообще говоря, неверно.

Пример 1.1. *Пусть* $K = \left\{\left|z\right| \le 1\right\} \subset \mathbb{C}$ *и* $\psi(z) = 1 - \left|z\right|^2$. *Тогда по принципу максимума*

$$V\left(z, K, \psi\right) = V\left(z, K, 0\right) = V\left(z, K\right) = \ln^+\left|z\right|.$$

Следовательно, $V\left(z, K, \psi\right) = 0 < \psi(z) \quad \forall \left|z\right| < 1.$

Согласно этому примеру, для того чтобы ввести понятие регулярности, далее мы будем предполагать, что функция Грина удовлетворяет условию (1.5).

Определение 1.13. Компакт K называется *глобально ψ-регулярным* в z^0, если $V^*\left(z^0, K, \psi\right) = \psi\left(z^0\right)$. Компакт K называется *локально ψ-регулярным* в z^0, если $V^*\left(z^0, K \cap B\left(z^0, r\right), \psi\right) = \psi\left(z^0\right)$ для любого шара $B\left(z^0, r\right)$, $r > 0$.

В следующей теореме речь пойдет о локальной регулярности для различных весовых функций.

Теорема 1.4. *Если* K *– компактное множество, и весовая функция* $\psi(z) \in C\left(K\right)$. *Тогда* K *является локально ψ-регулярным в точке* $z^0 \in K$

тогда и только тогда, когда K является локально плюрирегулярным (случай $\psi \equiv 0$) в z^0.

Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ – регулярная ограниченная область, $E \subset D$ – произвольное множество и $\psi(z)$ – строго отрицательная плюрисубгармоническая в D функция. Положим

$$\mathcal{U}\left(E, D, \psi\right) = \left\{u(z) \in psh(D) : u(z)\Big|_E \le \psi(z),\, u(z)\Big|_D < 0\right\}$$

и

$$\omega\left(z, E, D, \psi\right) = \sup\left\{u(z) : u(z) \in \mathcal{U}\left(E, D, \psi\right)\right\},$$

$$\omega^*\left(z, E, D, \psi\right) = \overline{\lim_{w \to z}}\, \omega\left(w, E, D, \psi\right).$$

Определение 1.14. Функция $\omega^*\left(z, E, D, \psi\right)$ называется *ψ-плюрисубгармонической мерой* множества E относительно области D.

Отметим, что $\omega^*\left(z, E, D, -1\right)$ совпадает со известной гармонической мерой теории плюрипотенциала, т.е. $\omega^*\left(z, E, D, -1\right) = \omega^*\left(z, E, D\right)$.

Теорема 1.5. *Пусть $\psi \in C(K)$ и $z^0 \in K \subset D$. Точка z^0 является локально ψ-регулярной тогда и только тогда, когда она локально регулярна относительно $\mathcal{P}$ –меры $\omega^*\left(z, K, D\right)$.*

Теорема 1.6. *Пусть компакт K является ψ-регулярным компактом и функция $\psi(z)$ непрерывна в K. Тогда $\omega^*\left(z, K, D, \psi\right) \equiv \omega\left(z, K, D, \psi\right) \in C\left(\bar{D}\right)$.*

Вторая глава диссертации, названная «**δ-экстремальная функция в пространстве $\mathbb{C}^n$**», состоит из трех параграфов. В этой главе диссертации исследованы δ-экстремальная функция $V\left(z, K, \delta, \psi\right)$.

Весовая функция Грина $V\left(z, K, \psi\right)$ определяется при помощи класса Лелона $\mathcal{L} := \left\{u(z) \in psh\left(\mathbb{C}^n\right) : u(z) \le C_u + \ln^+\left|z\right|,\, z \in \mathbb{C}^n\right\}$, как экстремальная функция (§ 1.4). Как мы увидим ниже, если экстремальную функцию определить, используя класс $\mathcal{L}^{\delta} := \left\{u(z) \in psh\left(\mathbb{C}^n\right) : u(z) \le C_u + \delta \ln^+\left|z\right|,\, z \in \mathbb{C}^n\right\}$, $\delta > 0$, то мы получим другую, так называемую δ-экстремальную функцию $V\left(z, K, \delta, \psi\right)$, которая качественно отличается от $V\left(z, K, \psi\right)$. Этот феномен, обнаруженный М. Алан , навел нас подробно раскрывать природу δ-экстремальную функцию $V\left(z, K, \delta, \psi\right)$.

Пусть $K \subset \mathbb{C}^n$ – компакт, и $\psi(z)$ – некоторая ограниченная функция на K. Рассмотрим следующее обобщение класса Лелона

$$\mathcal{L}^{\delta} := \left\{u(z) \in psh\left(\mathbb{C}^n\right) : u(z) \le C_u + \delta \ln^+\left|z\right|,\, z \in \mathbb{C}^n\right\}, \delta > 0.$$

Ясно, что $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}$ и если $v(z) \in \mathcal{L}$, то $c \cdot v(z) \in \mathcal{L}^\delta$, где $0 < c \leq \delta$. Положим

$$\mathcal{L}^\delta\left(K, \psi\right) := \left\{u(z) \in \mathcal{L}^\delta,\, u(z)\big|_K \leq \psi(z)\right\}.$$

Определение 2.1. Функция $V^*\left(z, K, \delta, \psi\right) = \overline{\lim_{w \to z}} V\left(w, K, \delta, \psi\right)$ называется δ *-экстремальной функцией* K с весом $\psi(z)$, где

$$V\left(z, K, \delta, \psi\right) := \sup\left\{u(z) : u(z) \in \mathcal{L}^\delta\left(K, \psi\right)\right\},\ z \in \mathbb{C}^n.$$

Определение 2.2. Компакт K называется *глобально* (δ, ψ)*-регулярным* в точке z^0, если $V^*\left(z^0, K, \delta, \psi\right) = \psi\left(z^0\right)$. Компакт K называется *локально* (δ, ψ) *-регулярным* в точке z^0, если $V^*\left(z^0, K \cap B\left(z^0, r\right), \delta, \psi\right) = \psi\left(z^0\right)$ для любого шара $B\left(z^0, r\right), r > 0$.

Теорема 2.1. *Пусть* K *– компактное множество, и* $\psi(z)$ *– весовая функция на* $K : \psi(z) \in C(K)$, $V\left(z, K, \delta, \psi\right) = \psi(z)\ \ \forall z \in K$. *Тогда* K *является локально* (δ, ψ)*-регулярным в* $z^0 \in K$ *тогда и только тогда, когда* K *является локально* $(\delta, 0)$*-регулярным в* z^0.

Теорема 2.2. *Пусть* $\psi(z)$ *непрерывна на* K. *Если* K *является глобально* (δ, ψ)*-регулярным, т.е. если* K *является глобально* (δ, ψ)*-регулярным в произвольной точке* $z^0 \in K$, *то* $V^*\left(z, K, \delta, \psi\right) = V\left(z, K, \delta, \psi\right)$ *и* $V^*\left(z, K, \delta, \psi\right)$ *непрерывна в* $\mathbb{C}^n$.

Заметим, что в общем случае $V\left(z, K, \delta, \psi\right)$ и весовая функция ψ не должны совпадать на K для всех δ. Бывает даже так, что $V\left(z, K, \delta, \psi\right)\big|_K \equiv \psi(z)$ для одних $\delta > 0$, а для других $\delta > 0$ это равенство не выполняется. Другими словами, условие (2.2) для таких $\delta > 0$ может не выполняться.

Пример 2.1. (см. Алан [2]). *Пусть* $K = \overline{B}(0,1)$ *и* $\psi(z) = \left|z\right|^2$. *Тогда можно доказать, что при* $0 < \delta \leq 2$

$$V\left(z, K, \delta, \psi\right) = \begin{cases} \left|z\right|^2, & \left|z\right| \leq \sqrt{\dfrac{\delta}{2}}, \\ \delta \ln\left|z\right| + \dfrac{\delta}{2} - \dfrac{\delta}{2} \ln\left|\dfrac{\delta}{2}\right|, & \left|z\right| > \sqrt{\dfrac{\delta}{2}}. \end{cases}$$

Понятно, что $V\left(z, K, \delta, \psi\right) = \left|z\right|^2$, $\forall z \in \left\{\left|z\right| \leq \sqrt{\dfrac{\delta}{2}}\right\}$ и

$V\left(z,K,\delta,\psi\right) < \left|z\right|^2$, $\forall z \in \left\{\sqrt{\frac{\delta}{2}} < \left|z\right| \le 1\right\}$. При $\delta > 2$

$$V\left(z,K,\delta,\psi\right) = \begin{cases} \left|z\right|^2, & \left|z\right| \le 1, \\ \delta \ln\left|z\right| + 1, & \left|z\right| > 1. \end{cases}$$

Таким образом, $V\left(z,K,\delta,\psi\right) = \psi\left(z\right)$ $\forall z \in K$ только для $\delta \ge 2$, а для остальных $\delta < 2$ функция Грина $V\left(z,K,\delta,\psi\right)$не совпадает с $\psi\left(z\right)$ на K .

Множество $\Lambda\left(K,\psi\right)$. Обозначим через $\Lambda = \Lambda\left(K,\psi\right)$ множество чисел δ, для которых выполняется равенство типа (2.2), т. е.

$$\Lambda = \Lambda\left(K,\psi\right) = \left\{\delta > 0 : V\left(z,K,\delta,\psi\right)_K \equiv \psi(z)\right\}.$$

Для примера Алана $\Lambda = \left[2,+\infty\right)$. Мы видим, что ,

$$V\left(z,K,2,\psi\right) = \begin{cases} \left|z\right|^2, & \left|z\right| \le 1, \\ 2\ln\left|z\right| + 1, & \left|z\right| > 1, \end{cases}$$

и $V\left(z,K,2,\psi\right)\Big|_K \equiv \psi(z)$. По свойству 1) параграфа 2.1 $V\left(z,K,\delta,\psi\right) \ge V\left(z,K,2,\psi\right)$ для всех $\delta \in \left[2,+\infty\right)$ и $V\left(z,K,\delta,\psi\right) = \psi(z)$ $\forall z \in K$, $\delta \ge 2$. Если же $\delta \in \left(0,2\right)$, то существует такая точка $z^0 \in K$, что $V\left(z^0,K,\delta,\psi\right) < \psi\left(z^0\right)$, т.е. $\left(0,2\right) \cap \Lambda = \varnothing$.

Множество Λ может быть пустым множеством. Например, для $K = \left\{\left|z\right| \le 1\right\} \subset \mathbb{C}$ и $\psi(z) = 1 - \left|z\right|^2$ по свойству 3)

$$V\left(z,K,\delta,\psi\right) = V\left(z,K,\delta\right) = \delta \cdot V\left(z,K\right) = \delta \cdot \ln^+\left|z\right|.$$

Поэтому $V\left(z,K,\delta,\psi\right) < \psi(z)$, $\forall\left|z\right| < 1$ для любого $\delta > 0$. Т.е. в этом случае $\Lambda = \varnothing$.

Λ может совпадать с $(0,+\infty)$, $\Lambda = (0,+\infty)$. Например, если $\psi(z) \equiv c$, где c – некоторая константа, то

$$V\left(z,K,\delta,c\right) = c + V\left(z,K,\delta\right) = c + \delta \cdot V\left(z,K\right).$$

Так как функция Грина $V\left(z,K\right) \ge 0$, то для любого $\delta > 0$ и $z \in K$ имеет место равенство $V\left(z,K,\delta,c\right) = c$. Это означает, что $\Lambda = (0,+\infty)$.

Пусть $\Lambda \ne \varnothing$. Если $\delta \in \Lambda$, то из свойства 1) мы легко получаем, что $\delta_1 \in \Lambda$ для всех $\delta_1 > \delta$. С другой стороны, имеет место

Предложение 2.1. *Если* $\delta_j \in \Lambda$, $\forall j \in \mathbb{N}$ *и* $\delta_j \downarrow \delta_0 \ne 0$ *при* $j \to \infty$, *тогда* $\delta_0 \in \Lambda$.

(δ,ψ)**-регулярность.** Мы ввели множество $\Lambda\left(K,\psi\right)$ для которого $V\left(z,K,\delta,\psi\right) = \psi(z)$, $z \in K$, при $\delta \in \Lambda\left(K,\psi\right)$.

Определение 2.3. Пусть $\delta \in \Lambda\Big(K, \psi\Big)$. Компакт K называется *глобально (δ, ψ)-регулярным* в точке $z^0 \in K$, если $V^*\Big(z^0, K, \delta, \psi\Big) = \psi\Big(z^0\Big)$. Он называется *локально (δ, ψ)-регулярным* в точке $z^0 \in K$, если $V^*\Big(z^0, K \cap \overline{B}\Big(z^0, r\Big), \delta, \psi\Big) = \psi\Big(z^0\Big)$ для любого непустого шара $B\Big(z^0, r\Big)$. Компакт K называется глобально (δ, ψ)-регулярным, если он глобально (δ, ψ)-регулярен в каждой точке. Компакт K называется локально (δ, ψ)-регулярным, если он локально (δ, ψ)-регулярен в каждой точке.

Заметим, что глобальная или локальная (δ, ψ)-регулярность может быть определена только для $\delta \in \Lambda$. Можно легко понять, что любая локально (δ, ψ)-регулярная точка является глобально (δ, ψ)-регулярной. Обозначим через $\Lambda_{reg} = \Lambda_{reg}\Big(K, \psi\Big)$ множество всех чисел $\delta \subset \Lambda$, для которых K является глобально регулярным, а через $\Lambda_{reg}^{loc} = \Lambda_{reg}^{loc}\Big(K, \psi\Big)$ – множество всех чисел $\delta \subset \Lambda$, для которых K является локально регулярным. Понятно, что $\Lambda_{reg}^{loc} \subset \Lambda_{reg} \subset \Lambda$.

Предложение 2.2. *Пусть $\delta_1, \delta_2 \in \Lambda$ и $\delta_1 \le \delta_2$. Если точка z^0 является $\Big(\delta_2, \psi\Big)$-регулярной, то она является $\Big(\delta_1, \psi\Big)$-регулярной.*

Теорема 2.3. *Пусть $\delta \in \Lambda$, и функция $\psi(z)$ непрерывна на K. Фиксированная точка $z^0 \in K \subset \mathbb{C}^n$ локально (δ, ψ)-регулярна тогда и только тогда, когда она локально плюрирегулярна.*

Следствие 2.1. *Пусть $\delta_1, \delta_2 \in \Lambda$, и функция $\psi(z)$ непрерывна на K. Фиксированная точка $z^0 \in K \subset \mathbb{C}^n$ локально $\Big(\delta_1, \psi\Big)$-регулярна тогда и только тогда, когда она локально $\Big(\delta_2, \psi\Big)$-регулярна.*

Предложение 2.3. *Если $\delta_j \in \Lambda_{reg}$, $\forall j \in \mathbb{N}$ и $\delta_j \uparrow \delta$ при $j \to \infty$, тогда $\delta \in \Lambda_{reg}$.*

Следствие 2.2. *Если $\Lambda = \Big[\delta_0, \infty\Big)$, то* $\Lambda_{reg} = \begin{cases} \text{или } \Big[\delta_0, \delta_1\Big], \\ \text{или } \Big[\delta_0, \infty\Big). \end{cases}$.

Если $\Lambda = \Big(0, \infty\Big)$, то $\Lambda_{reg} = \begin{cases} \text{или } \Big(0, \delta_1\Big], \\ \text{или } \Big(0, \infty\Big). \end{cases}$

Дальнейшие свойства δ-экстремальной функции связаны с плюриразреженными множествами.

Определение 2.4. Пусть $E \subset \mathbb{C}^n$, и пусть E' – множество его предельных точек. Тогда E называется *плюриразреженным* в z^0, если или

$z^0 \not\in E'$, или $z^0 \in E'$, но существует окрестность U точки z^0 и функция $u(z) \in psh(U)$ такие, что

$$\overline{\lim_{\substack{z \to z^0 \\ z \in E \setminus \{z^0\}}}} u(z) < u\left(z^0\right).$$

Разреженность и регулярность. В классической теории потенциала имеется глубокая связь разреженности с регулярностью точек. На комплексной плоскости (случай $n = 1$), имеет место

Теорема 2.4. *Точка $z^0 \in K$ является локально иррегулярной точкой компакта $K \subset \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда она является разреженной точкой множества K.*

В многомерном случае мы имеем утверждение только в одну сторону. Есть необходимое условие, когда точка $z^0 \in K$ является (δ,ψ)-регулярной, т.е. для $V^*\left(z^0, K, \delta, \psi\right) = \psi\left(z^0\right)$.

Теорема 2.5. *Если z^0 – плюриразреженная точка K, тогда z^0 – локально (δ,ψ)-иррегулярная точка K. Здесь функция $\psi \in C(K)$ и $\delta \in \Lambda$.*

Другими словами, для регулярности точки $z^0 \in K$, $V^*\left(z^0, K, \delta, \psi\right) = \psi\left(z^0\right)$, необходимо, чтобы z^0 была не плюриразреженной точкой компакта K.

Следующий пример показывает, что в случае $n > 1$ достаточность условия теоремы 2.5, вообще говоря, неверно.

Пример 2.4. *Пусть $(\delta,\psi) = (1,0)$, и*

$$K = \left\{\left(z_1, z_2\right) \in \mathbb{C}^2 : \left|z\right| \le 1\right\} \cup \left\{\left(z_1, z_2\right) \in \mathbb{C}^2 : z_2 = 0,\ \left|z_1\right| \le 2\right\}.$$

Компактное множество K – это объединение единичного шара в $\mathbb{C}^2$ и плюриполярного множества. Имеем

$$V(z,K) = \begin{cases} \ln^+\left|z\right|, & z_2 \ne 0 \\ \ln^+\left|\dfrac{z_1}{2}\right|, & z_2 = 0. \end{cases}$$

и $V^*\left(z, K\right) = \ln^+\left|z\right|$.

Точка $(2,0) \in K$ – иррегулярная точка, ибо $V^*\left((2,0), K\right) = \ln 2 > 0$. Однако она не является плюриразреженной, согласно примеру 2.2.

В третьей главе диссертации, названной «**Функция Грина с весом в классе** m – **субгармонических функций**» состоит из трех параграфов. Изучение класса m – субгармонических $\left(sh_m\right)$ функций при $1 \le m < n$ несколько отличается от изучения класса плюрисубгармонических (psh) функций, $m = n$. Особенно в вопросах свойств Грина, в вопросах регулярности компактов эти различия ярко проявляются. Дело в том, что в определении функции Грина основную роль играет фундаментальное решение оператора $\left(dd^c\omega(z)\right)^m \wedge \left(dd^c\left|z\right|^2\right)^{n-m}$. Если для $m=n$ (случай плюрисубгармонических функций) решение $\omega(z)=const\cdot\ln\left|z\right|$, оно стремится к $+\infty$ при $z\to\infty$, то для $1\le m<n$ фундаментальное решение равняется $\omega_m(z)=-\dfrac{const}{\left|z\right|^{2(n/m-1)}}$, $\left(dd^c\omega_m\right)^m \wedge \left(dd^c\left|z\right|^2\right)^{n-m}=\delta_0$, где δ_0 – мера Дирака и оно не ограничено.

Это обстоятельство показывает, что в исследовании функции Грина при $1\le m<n$ требуется другой подход, другие методы. Настоящая глава диссертации посвящена свойствам функции Грина с весом, вопросам $m-$ регулярности компактов в $\mathbb{C}^n$. Ниже мы будем рассматривать класс $m-$ субгармонических функций для $1\le m<n$, имея в виду, что класс плюрисубгармонических функций (случай $m=n$) рассматривался в предыдущей Главе 2.

Класс Лелона. Для $1\le m<n$ нам удобно определить класс Лелона как

$$\mathcal{L}_m=\left\{u(z)\in sh_m\left(\mathbb{C}^n\right):\quad u(z)\le 1\right\}.$$

Тогда функция $K_m(z)=-\dfrac{1}{\left|z\right|^{2(n/m-1)}}+1\in\mathcal{L}_m$ и

$$\left(dd^cK_m\right)^m\wedge\left(dd^c\left|z\right|^2\right)^{n-m}=0,\ z\in\mathbb{C}^n\setminus\left\{0\right\}.$$

Следовательно $K_m(z)$ является максимальной $m-$субгармонической функцией в $\mathbb{C}^n\setminus\left\{0\right\}$. В дальнейшем функция $K_m(z)$ часто используется при изучении функции Грина. Отметим, что если $m=n$, то $sh_m=psh$, и класс $\mathcal{L}_m$ тривиален, $\mathcal{L}_m=\left\{const\right\}$.

Для изучения $m-$функции Грина в классе sh_m или $m-wsh$ весьма важна следующая

Теорема 3.1. *Если $E\subset\mathbb{C}^n$ является $m-$полярным или $mw-$полярным множеством, то оно является $\mathcal{L}_m-$полярным или $\mathcal{L}_{mw}-$полярным множеством. Другими словами, если существует $u(z)\in sh_m\left(\mathbb{C}^n\right):\ u(z)\not\equiv-\infty,\ u\big|_E=-\infty,$ то существует функция $w(z)\in\mathcal{L}_m:\ w(z)\not\equiv-\infty,\ w\big|_E=-\infty.$ Если существует $u(z)\in m-wsh\left(\mathbb{C}^n\right):\ u(z)\not\equiv-\infty,\ u\big|_E=-\infty,$ то существует функция $w(z)\in\mathcal{L}_{mw}:\ w(z)\not\equiv-\infty,\ w\big|_E=-\infty.$*

Здесь $\mathcal{L}_{mw}=\left\{u(z)\in m-wsh\left(\mathbb{C}^n\right):\quad u(z)\le 1\right\}.$

Весовая функция Грина. Фиксируем множество $E\subset\mathbb{C}^n$ и берем функцию $\psi(z)$ – ограниченную на множестве $E\subset\mathbb{C}^n$. Так как функция Грина определяется при помощи класса Лелона $\mathcal{L}_m=\left\{u(z)\in sh_m\left(\mathbb{C}^n\right):\ \ u(z)\le 1\right\}$, то нам необходимо рассматривать функции, не превосходящие 1 и считать что $\psi(z)<1$.

Пусть

$$\mathcal{L}_m\left(E,\psi\right):=\left\{u(z)\in\mathcal{L}_m,\, u(z)\Big|_E\le\psi(z)\right\}.$$

Положим

$$V_m\left(z,E,\psi\right):=\sup\left\{u(z):u(z)\in\mathcal{L}_m\left(E,\psi\right)\right\},\, z\in\mathbb{C}^n.$$

Регуляризация $V_m^*\left(z,E,\psi\right)=\overline{\lim_{w\to z}}V_m\left(w,E,\psi\right)$ называется *весовой* $m-$ *функцией Грина* K *относительно* $\psi(z)$.

Нетрудно доказать следующие простые свойства весовых $m-$функций Грина:

1) $V_m^*\left(z,E,\psi\right)\in\mathcal{L}_m$, *она является максимальной,*

$\left(dd^cV_m^*\left(z,E,\psi\right)\right)^m\wedge\left(dd^c\left|z\right|^2\right)^{n-m}=0$ *в* $\mathbb{C}^n\setminus\bar{E}$ (см. [57]).

2) *Функция Грина* $1\ge V_m^*\left(z,E,\psi\right)\ge\inf\limits_E\psi\left(z\right)$. $V_m^*\left(z,E,\psi\right)\equiv 1$ *тогда и только тогда, когда* E *– полярное множество в* $\mathbb{C}^n$.

3) *Если* $E_1\subset E_2$ *и функция* $\psi(z)$ *определена на* E_2, *то* $V_m\left(z,E_1,\psi\right)\ge V_m\left(z,E_2,\psi\right)$. *Вытекает от того, что* $\mathcal{L}_m\left(E_1,\psi\right)\supset\mathcal{L}_m\left(E_2,\psi\right)$.

4) *Если* $\psi_1\le\psi_2\ \forall z\in E$, *то* $V_m\left(z,E,\psi_1\right)\le V_m\left(z,E,\psi_2\right)$. *Вытекает от того, что* $\mathcal{L}_m\left(E,\psi_1\right)\subset\mathcal{L}_m\left(E,\psi_2\right)$.

Лемма 3.1. *Для любого множества* $E\subset\mathbb{C}^n$ *имеет место следующие неравенства:*

$$\inf_{z\in E}\psi(z)+\left(1-\inf_{z\in E}\psi(z)\right)\cdot V_m\left(z,E\right)\le V_m\left(z,E,\psi\right)\le$$
$$\le\left(1-\sup_{z\in E}\psi(z)\right)\cdot V_m\left(z,E\right)+\sup_{z\in E}\psi(z),\qquad\forall z\in\mathbb{C}^n.\qquad(3.1)$$

Следствие 3.1. *Для любого множества* $E\subset\mathbb{C}^n$ *имеет место неравенства:*

$$\inf_{z\in E}\psi(z)+\left(1-\inf_{z\in E}\psi(z)\right)\cdot V_m^*\left(z,E\right)\le V_m^*\left(z,E,\psi\right)\le$$
$$\le\left(1-\sup_{z\in E}\psi(z)\right)\cdot V_m^*\left(z,E\right)+\sup_{z\in E}\psi(z),\qquad\forall z\in\mathbb{C}^n.\qquad(3.2)$$

Следствие 3.2. $V_m^*\left(z,E,\psi\right)\equiv 1$ *тогда и только тогда, когда* $V_m^*\left(z,E\right)\equiv 1$.

Регулярные компакты. Как и в Главе 2 для изучения регулярных компактов мы предположим, что $F\subset\mathbb{C}^n$ – компакт и функция $\psi(z)$ продолжается в пространство $\mathbb{C}^n$ как функция из класса $\mathcal{L}_m$, т.е. существует функция

$$\Psi\in\mathcal{L}_m : \Psi\mid_F\equiv\psi. \tag{3.3}$$

Тогда очевидно, что $V_m\left(z,F,\psi\right)\geq\Psi(z)$ и

$$V_m\left(z,F,\psi\right)\equiv\psi(z),\ z\in K. \tag{3.4}$$

Определение 3.1. Будем говорить, что компактное множество F *глобально* $\left(m,\psi\right)$*-регулярно* в z^0, если $V_m^*\left(z^0,F,\psi\right)=\psi\left(z^0\right)$. Будем говорить, что компакт F *локально* (m,ψ)*-регулярен* в z^0, если $V_m^*\left(z^0,F\cap\overline{B}(z^0,r),\psi\right)=\psi\left(z^0\right)$ для любого шара $B\left(z^0,r\right)$, $r>0$.

Теорема 3.2. *Пусть* $\psi(z)$ *– непрерывная функция на* F. *Если* F *является глобально* (m,ψ)*-регулярным, т.е. если* F *является глобально* (m,ψ)*-регулярным в произвольной точке* $z^0\in F$, *тогда* $V_m^*\left(z,F,\psi\right)=V_m\left(z,F,\psi\right)$ *и* $V_m^*\left(z,F,\psi\right)$ *непрерывна в* $\mathbb{C}^n$.

Теорема 3.3. *Пусть* F *– компактное множество, и* $\psi(z)$ *– весовая функция на* K: $\psi(z)\in C(F)$. F *является локально* (m,ψ)*-регулярным в* $z^0\in F$ *тогда и только тогда, когда* F *является локально* m*-регулярным (случай* $\psi\equiv 0$*) в* z^0.

Пусть K – компактное множество, и ψ – некоторая ограниченная функция на F. Предположим, что $\psi(z)<\delta$. Положим

$$\mathcal{L}_m^\delta\left(F,\psi\right):=\left\{u(z)\in\mathcal{L}_m^\delta,\ u(z)\Big|_F\leq\psi(z)\right\}.$$

Определение 3.2. Функция $V_m^*\left(z,F,\delta,\psi\right)=\overline{\lim_{w\to z}}V_m\left(z,F,\delta,\psi\right)$ называется (m,δ) *– функцией Грина* компактного множества F относительно ψ, где

$$V_m\left(z,F,\delta,\psi\right):=\sup\left\{u(z):u(z)\in\mathcal{L}_m^\delta\left(F,\psi\right)\right\},\ z\in\mathbb{C}^n.$$

Лемма 3.2. *Для любого компактного множества* F *и для любой ограниченной функции* $\psi(z)<\delta$, *имеет место следующее неравенство:*

$$\begin{gathered}\inf_{z\in F}\psi(z)+\left(\delta-\inf_{z\in F}\psi(z)\right)\cdot V_m^*\left(z,F\right)\leq V_m^*\left(z,F,\delta,\psi\right)\leq\\ \leq\sup_{z\in F}\psi(z)+\left(\delta-\sup_{z\in F}\psi(z)\right)\cdot V_m^*\left(z,F\right).\end{gathered} \tag{3.6}$$

Как и для psh функций (случай $m=1$) здесь тоже важен вопрос о регулярности компактов $F \subset \mathbb{C}^n$. Первой неприятностью в этих вопросах является выполнение условия $V_m\left(z, F, \delta, \psi\right)\Big|_F \equiv \psi$. Дело в том, что если, например компакт F содержит непустую внутренность $F^0 \neq \varnothing$ и весовая функция не удовлетворяет принципа максимума в F^0, т.е. $\psi\left(z^0\right) > \sup\limits_{z\in F} \psi\left(z\right)$, в некоторой точке $z^0 \in F^0$, то по принципу максимума в классе $\mathcal{L}_m^\delta$ всегда $V_m\left(z^0, F, \delta, \psi\right) \le \sup\limits_{z\in F} V_m\left(z, F, \delta, \psi\right) \le \sup\limits_{z\in F} \psi\left(z\right) < \psi\left(z^0\right)$. Кроме того, как мы отметили выше для psh функций (случай $m = 1$) даже для плюрисубгармонических в окрестности компакта F весовой функции $\psi(z)$, для которого верен принцип максимума, в общем случае $V_m\left(z, F, \psi, \delta\right)$ и весовая функция ψ не должны быть в точности равными на F для всех δ. Другими словами, условие $V_m\left(z, F, \delta, \psi\right)\Big|_F \equiv \psi$ может не выполняться.

Пример 3.1. *Пусть* $F = \overline{B}(0,1) \subset \mathbb{C}^2$ *и* $\psi(z) = \left|z\right|^2 - 1$. Тогда *нетрудно доказать, что при* $0 < \delta \le 1$

$$V_1\left(z, F, \delta, \psi\right) = \begin{cases} \left|z\right|^2 - 1, & \left|z\right|^2 \le \dfrac{1+\delta}{2}, \\ \delta\left(1 - \dfrac{\left(1+\delta\right)^2}{4\delta\left|z\right|^2}\right), & \left|z\right|^2 > \dfrac{1+\delta}{2} \end{cases}$$

и при $\delta > 1$

$$V_1\left(z, F, \delta, \psi\right) = \begin{cases} \left|z\right|^2 - 1, & \left|z\right|^2 \le 1, \\ \delta\left(1 - \dfrac{\left(1+\delta\right)^2}{4\delta\left|z\right|^2}\right), & \left|z\right|^2 > 1. \end{cases}$$

Множество $\Lambda_m\left(F, \psi\right)$. Обозначим через $\Lambda_m = \Lambda_m\left(F, \psi\right)$ множество чисел $\delta > 0$, для которых выполняется равенство типа (3.3), т.е.

$$\Lambda_m = \left\{\delta > 0 : V_m\left(z, F, \delta, \psi\right)\Big|_F \equiv \psi(z)\right\}.$$

Пусть $\Lambda_m \neq \varnothing$. Тогда из свойства $V_m\left(z, F, \delta, \psi\right)$ мы легко получаем, что если $\psi(z) < \delta$ и $\delta \in \Lambda_m$, то $\delta_1 \in \Lambda$ для всех $\delta_1 > \delta$.

Предложение 3.1. *Если* $\delta_j \in \Lambda_m$, $\forall j \in \mathbb{N}$ *и* $\delta_j \downarrow \delta_0 \neq 0$ *при* $j \to \infty$, *то* $\delta_0 \in \Lambda$.

(m, δ, ψ) – **регулярность.** Как и выше когда рассматривается функция $V_m^*\left(z, F, \delta, \psi\right)$ нам нужно потребовать, чтобы выполнялось условие $\psi\left(z\right) < \delta$.

Определение 3.4. Пусть $\delta \in \Lambda_m\left(\psi, F\right)$. Компакт F называется *глобально* (m,δ,ψ)*-регулярным* в точке $z^0 \in F$, если $V_m^*\left(z^0, F, \psi, \delta\right) = \psi\left(z^0\right)$. Он называется *локально* (m,δ,ψ)*-регулярным* в точке $z^0 \in F$, если $V_m^*\left(z^0, F \cap \overline{B}\left(z^0, r\right), \delta, \psi\right) = \psi\left(z^0\right)$ для любого непустого шара $B\left(z^0, r\right)$. Компакт F называется *глобально* (m,δ,ψ)*-регулярным*, если он глобально (m,δ,ψ)-регулярен в каждой своей точке. Компакт F называется *локально* (m,δ,ψ)*-регулярным*, если он локально (m,δ,ψ)-регулярен в каждой своей точке.

Предложение 3.3. *Пусть* $\delta_1, \delta_2 \in \Lambda_m\left(\psi, F\right)$ *и* $\delta_1 \le \delta_2$. *Если точка* z^0 – $\left(m, \delta_2, \psi\right)$*-регулярна, тогда она* $\left(m, \delta_1, \psi\right)$*-регулярна.*

Теорема 3.4. *Пусть* $\delta \in \Lambda\left(\psi, F\right)$ *и функция* $\psi(z)$ *непрерывна на* F. *Фиксированная точка* $z^0 \in F \subset \mathbb{C}^n$ *локально* (m,δ,ψ)*-регулярна тогда и только тогда, когда она локально* m*-регулярна.*

Следствие 3.3. *Пусть* $\delta_1, \delta_2 \in \Lambda\left(\psi, F\right)$ *и функция* $\psi(z)$ *непрерывна на* F. *Фиксированная точка* $z^0 \in F \subset \mathbb{C}^n$ *локально* $\left(m, \delta_1, \psi\right)$*-регулярна тогда и только тогда, когда она локально* $\left(m, \delta_2, \psi\right)$*-регулярна.*

Конечно, здесь предполагается чтобы выполнялось $\psi(z) < \min\left\{\delta_1, \delta_2\right\}$.

Теперь будем изучать связь между весовой (m,δ)-функции Грина с m-разреженными множествами.

Определение 3.5. Пусть $E \subset \mathbb{C}^n$. Тогда E называется m*-разреженным* в z^0, если или $z^0 \not\in E'$, или $z^0 \in E'$, но существует окрестность U точки z^0 и функция $u(z) \in sh_m\left(U\right)$ такие, что $\overline{\lim\limits_{\substack{z \to z^0 \\ z \in E \setminus \{z^0\}}}} u(z) < u\left(z^0\right)$.

Здесь E' – множество предельных точек E.

Предложение 3.5. *Если множество* $E \subset \mathbb{C}^n$ *является* m*- разреженным в предельной точке* $z^0 \in E$, *то существует* m*-субгармоническая функция* $u \in \mathcal{L}_m$ *такая, что* $\overline{\lim\limits_{\substack{z \to z^0 \\ z \in E \setminus \{z^0\}}}} u(z) < u\left(z^0\right)$.

Теорема 3.6. *Если* z^0 – m*-разреженная точка* F, *то* z^0 *локально* (m,δ,ψ)*-иррегулярная точка* F. *Здесь функция* $\psi \in L^\infty(F)$ *и* $\delta \in \Lambda_m$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В целом, полученные в диссертации результаты позволяют говорить о достижении цели диссертационной работы. Диссертация посвящена изучению экстремальных функций в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Все основные результаты являются новыми и в совокупности вносят определенный вклад в теорию потенциала. Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Доказана следующая

Теорема 1.5. Пусть $\psi \in C(K)$ и $z^0 \in K \subset D$. Точка z^0 является локально ψ-регулярной тогда и только тогда, когда она локально регулярна относительно $\mathcal{P}$ – меры $\omega^*\left(z, K, D\right)$.

2. Доказана следующая

Теорема 2.2. *Пусть $\psi(z)$ непрерывна на K. Если K является глобально (δ,ψ)-регулярным, т.е. если K является глобально (δ,ψ)-регулярным в произвольной точке $z^0 \in K$, то $V^*\left(z, K, \delta, \psi\right) = V\left(z, K, \delta, \psi\right)$ и $V^*\left(z, K, \delta, \psi\right)$ непрерывна в $\mathbb{C}^n$.*

3. Дана полная структура множество $\Lambda_{reg} = \Lambda_{reg}\left(K, \psi\right)$, точек $\delta > 0$ для которых компакт K является (m,δ,ψ)-регулярным:

$$\text{если } \Lambda = \left[\delta_0, \infty\right), \text{ то } \Lambda_{reg} = \begin{cases} \text{или } \left[\delta_0, \delta_1\right], \\ \text{или } \left[\delta_0, \infty\right); \end{cases}$$

$$\text{если } \Lambda = \left(0, \infty\right), \text{ то } \Lambda_{reg} = \begin{cases} \text{или } \left(0, \delta_1\right], \\ \text{или } \left(0, \infty\right). \end{cases}$$

4. Изучена связь δ-экстремальной функции с плюриразреженними множествами.

5. Определено понятие функция Грина с весом в классе $m-$ субгармонических функций в пространстве $\mathbb{C}^n$, изучены их потенциальные свойства, такие как максимальность, непрерывность и т.п.

6. Исследовано весовые $\left(m, \delta\right)$ – функции Грина для различных $\delta > 0$. Для $\delta \in \Lambda\left(\psi, F\right)$ изучены вопросы локальной регулярности компактов $K \subset \mathbb{C}^n$. Доказана

Теорема 3.4. *Пусть $\delta \in \Lambda\left(\psi, F\right)$ и функция $\psi(z)$ непрерывна на F. Фикисрованная точка $z^0 \in F \subset \mathbb{C}^n$ локально (m,δ,ψ)-регулярна тогда и только тогда, когда она локально m-регулярна.*

7. Доказывается аналог теоремы Бедфорда о m – разреженности, которая затем применяется для доказательства следующей теоремы

Теорема 3.6. *Если z^0 – m- разреженная точка F, то z^0 локально (m,δ,ψ)-иррегулярная точка F. Здесь функция $\psi \in L^\infty(F)$ и $\delta \in \Lambda_m$.*

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc. 03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN
NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NARZILLAEV NURBEK KHAMROKULOVICH

WEIGHTED GREEN FUNCTION

01.01.01 – Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2022

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.4.PhD/FM428.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council (http://ik-fizmat.nuu.uz/) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (http://www.ziyonet.uz/).

Scientific supervisor:	**Sadullaev Azimbay** Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Ganikhodjaev Rasul Nabiyevich** Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
	Sharipov Rasulbek Akhmedovich PhD in Physical and mathematical Sciences
Leading organization:	**Karakalpak State University named after Berdakh**

Defense will take place on "23" 08 2022 at 11^00 at the meeting of Scientific Council DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 53 21, Fax: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at National University of Uzbekistan (registered for No. 93). (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 02 24).

Abstract of dissertation sent out on "9" 08 2022.
(Mailing report No. 2 on "9" 08 2022).

B.A.Shoimkulov
Deputy chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

N.K.Mamadaliev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
PhD in Math. and Physics

R.N.Ganikhodjaev
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the study is to study the weighted Green's function in the class of plurisubharmonic and subharmonic functions, to study the regularity of compact sets using extremal plurisubharmonic functions.

The object of study are plurisubharmonic function, $m-$subharmonic function, weakly $m-$subharmonic function, Green's function, weighted Green's function, $\delta-$extremal function.

Scientific novelty of the research work is as follows:

- the definition of a $\psi-$plurisubharmonic measure and the proof of a number of new properties that characterize the regularity of this measure;
- study of $\delta-$extremal function $V\left(z,K,\delta,\psi\right)$ and proof of continuity of functions $V^*\left(z,K,\delta,\psi\right)$ for regular compact sets;
- show a general situation of the regularity of compact sets for various δ;
- establish a connection between the weighted $\delta-$extremal Green's function with the thinness of sets;
- prove the equivalence of $m-$polar and $mw-$polar sets with $\mathcal{L}_m-$ and $\mathcal{L}_{mw}-$polar sets, respectively;
- determination of weighted Green's functions $V_m^*\left(z,F,\psi\right)$ and $V_m^*\left(z,F,\delta,\psi\right)$, proof of their basic properties;
- establish a connection between the weight $(m,\delta)-$ Green's function with $m-$thinness of sets.

Implementation of the research results. The results obtained in the thesis were used in the following research projects:

1. OT-F4-(37+29) "Functional properties of -analytical functions and their applications. Some tasks of complex analysis in matrix areas", (Reference dated November 5, 2021, National University of Uzbekistan). The results of the thesis made it possible to prove a number of functional properties of A-analytical functions.

2. FA-F-4-002 "Subharmonic functions and their applications to calibrated geometry" (Certificate of November 17, 2021, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan). The results obtained in the dissertation helped the study of potential theory in the class of $m-$subharmonic functions.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters divided into twelve paragraphs, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation is 89 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Narzillaev N.Kh. Delta-extremal functions in $\mathbb{C}^n$ // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2021. – Volume 14:3. – P. 389–398. (№ 3 Scopus IF=0.268).
2. Narzillaev N.Kh. Weighted (m,δ) – Green functions in $\mathbb{C}^n$ // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. – 2021. – Volume 4:1. – P. 100 – 111. (01.00.00, № 8).
3. Narzillaev N.Kh., Kuldashev K.K. The ψ –harmonic measure and its properties // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. – 2020. – Volume 3:4. – P. 463 – 473. (01.00.00, № 8).
4. Кулдашев К.К., Нарзиллаев Н.Х. ψ –плюрисубгармоническая мера // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. – 2021. – №2. – С. 15–20. (01.00.00, № 7).
5. Нарзиллаев Н.Х. О ψ –регулярных точках // Вестник НУУз. – 2017. – № 2/2. – С. 173 – 175. (01.00.00, № 8).
6. Нарзиллаев Н.Х. mw – полярные и $\mathcal{L}_{mw}$ – полярные множества в $\mathbb{C}^n$ // Илм сарчашмалари. – 2021. – №12. – С. 19–23. (01.00.00, № 12).

II бўлим (2 часть; part 2)

7. Narzillaev N.Kh. Locally (ψ,α) – regular compact sets in $\mathbb{C}^n$ // Abstracts of the International Online Conference “Frontier in Mathematics and Computer science” – Tashkent, 12–15 October 2020. P. 113–114.
8. Narzillaev N.Kh. Weighted extremal functions in the class m – subharmonic functions // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых “Сарымсаковские чтения” – Ташкент, 16–18 сентября 2021 года. – С. 251–252.
9. Narzillaev N.Kh. Weighted regularity notions in $\mathbb{C}^n$ // Abstracts of the Uzbekistan-Malaysia international online conference “Computational models and technologies” – Tashkent, 24–25 August 2020. P. 120–121.
10. Narzillaev N.Kh., Kuldashev K.K., Eshdavlatova S.E. Weighted harmonic measure // Proceedings of scientific conference “Actual problems of stochastic analysis” – Tashkent, 20–21 February 2021. P. 223–224.
11. Нарзиллаев Н.Х. Носители весовой функции Грина для строго плюрисубгармонического веса // Труды республиканской научно-практической конференции «Статистика и её применения» – Ташкент, 17–18 октября 2019 года. – С. 385–386.

12. Нарзиллаев Н.Х. ψ –плюрисубгармоническая мера // Abstracts of the international conference “Modern problems of geometry and topology and its applications” – Tashkent, 21–23 November 2019. – P. 159.
13. Нарзиллаев Н.Х. Точка разрыва весовая функция $\psi(z)$ // Материалы республиканской научно-практической конференции «Статистика и её применения» – Ташкент, 19–20 октября 2017 года. – С. 328–329.
14. Нарзиллаев Н.Х. Функция Грина с весом $\psi(z)$ // Материалы научной конференции «Актуальние вопросы анализа» – Карши, 22–23 апреля 2016 года. – С. 34–35.
15. Нарзиллаев Н.Х., Эшдавлатова С.Э. (α,ψ) – регулярные компакты в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ // Abstracts of the Uzbekistan-Malaysia international online conference “Computational models and technologies” – Tashkent, 24–25 August 2020. P. 142.

Автореферат «ЎзМУ хабарлари» журнали таҳририятида таҳрирдан ўтказилиб, ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги матнлар ўзаро мувофиқлаштирилди.

Босмахона лицензияси:

9338

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 3,5. Адади 100 дона. Буюртма № 1/22.

Гувоҳнома № 851684.
«Tipograff» МЧЖ босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.